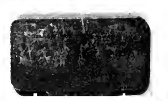

VITT. EMANUELE III

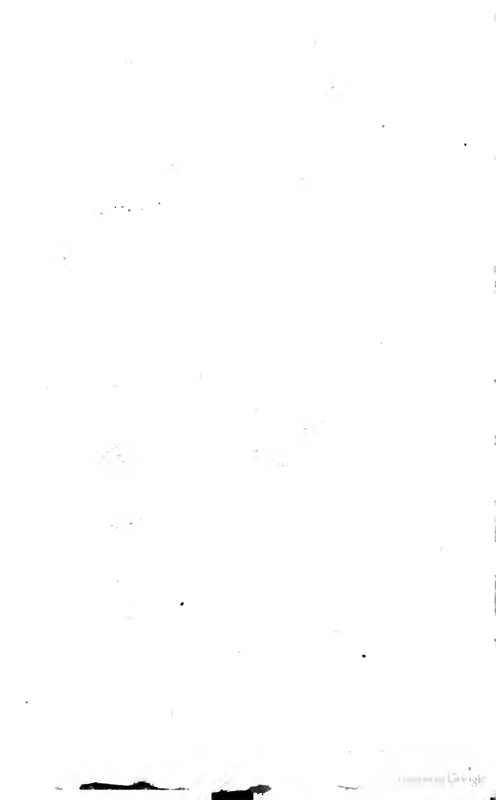

FONDO PROVINCIA











ASTRONOMISCHE UNDULATIONSTHEORIE

ODER



DIE LEHRE

VON DER

ABERRATION DES LICHTES.

VON

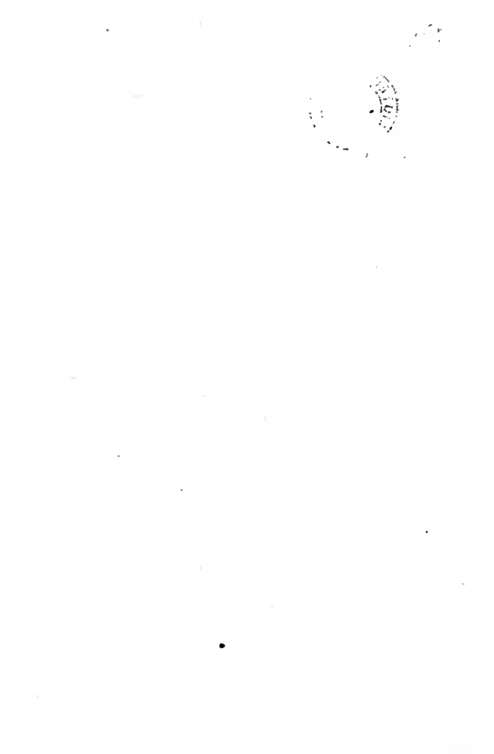
DR. E. KETTELER,
A. O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BONN.





MIT 44 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BONN,
DRUCK UND VERLAG VON P. NEUSSER.
1873.



Vorwort.

Die vorliegende Schrift enthält zunächst sieben Abhandlungen, die unter dem Titel: „Ueber den Einfluss der astronomischen Bewegungen auf die optischen Erscheinungen“ bereits im 144., 146., 147. und 148. Bande von Poggendorff's Annalen veröffentlicht wurden, die ich indess neuerdings in mehrfachen Punkten umgearbeitet habe. Dieselben sind durch eine neu hinzugekommene Abhandlung sowie durch (neun) neue Zusätze zu einem einheitlichen Ganzen mit einander verknüpft, resp. vervollständigt. Den Schluss bilden zwei Anhänge, von denen der erstere die ursprüngliche Formulirung des Doppler'schen Princips und der zweite den berühmten Brief Fresnel's an Arago, also die erste Formulirung der Fresnel'schen Theorie, enthält.

Wohl ist die Zahl derer, die sich seit Fresnel und Doppler mit der Abhängigkeit der akustischen und optischen Phänomene von der Bewegung beschäftigt haben, eine beträchtliche, — in den eingefügten geschichtlichen Abrissen wurden erwähnt: Ångström, Arago, Babinet, Baden Powell, Beer, Biot, Boussinesq, Cauchy, Challis, Dufour, Fr. Eisenlohr, v. Ettingshausen, Faye, Fizeau, Hoek, Huggins, Klinkerfues, König, Mach, Mascart, Maxwell, Mayer, Moigno, Montigny, Petzval, Puschl, Radau, Respighi, Russel, Secchi, Sellmeier, Stokes, de Tessan, Vogel, van der Willigen, Zöllner. Aber um so mehr dürfte es befremden, dass so manche Widersprüche und Irrthümer sich bis heute erhalten konnten, und dass zu einer umfassenden Monographie noch kein Versuch gemacht worden.

Die Anregung zu den hier niedergelegten Arbeiten erhielt der Verfasser durch die Lectüre einiger einschlägigen Aufsätze von Klinkerfues und van der Willigen. Er hat dann alle Controversen, die ihm entgegentraten, einzeln klar-

zustellen und die vorhandenen Lücken auszufüllen gesucht. Dabei dehnte sich das durchforschte Gebiet mehr und mehr aus, und es erweiterten sich zugleich die Gesichtspunkte. Vielleicht erscheint nunmehr die Hoffnung nicht ganz unberechtigt, dass eine angemessene Ausführung und Zusammenfassung derselben zur „Astronomischen Undulationstheorie" — zumal in der gegenwärtigen Zeit des Aufblühens einer Astrophysik — Manchem willkommen sein werde.

Bezüglich der gewonnenen Resultate verweise ich auf die Zusammenstellung auf S. 217. Es mag indess schon hier hervorgehoben werden, dass die bekannte Formel Fresnel's auf die anisotropen Mittel erweitert und ihr natürlich einfacher Zusammenhang mit dem Satze Doppler's erwiesen wurde. Auf Grund dessen konnte dann nicht bloss, wie ich meine, eine experimentelle Entscheidung der Frage nach der Schwingnngsrichtung des polarisirten Lichtes endgültig vorbereitet, sondern auch im Anschluss an die Vorstellung Sellmeier's die vollständige Theorie der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in bewegten Mitteln gegeben und die bis dahin von ihm und Boussinesq vertretene Ansicht von einem thätigen Mitschwingen der ponderablen Theilchen in ihrer vollen Bedeutung und Fruchtbarkeit gewürdigt werden.

„Vielleicht", sagt Fizeau im Jahre 1850 bei Beschreibung seines erfolgreichen, aber delicaten Interferenzversuches, „vielleicht scheint die Conception von Fresnel (bezüglich der fast absoluten Durchdringlichkeit des Aethers seitens bewegter Weltkörper) so ausserordentlich und in mancher Beziehung so schwierig annehmbar, dass es noch anderer Proben und einer gründlichen Untersuchung von Seiten der Mathematiker bedarf, ehe man sie als Ausdruck der Wirklichkeit zulassen kann."

Möge denn meine Schrift, die den gegenwärtigen Standpunkt unseres Wissens darlegt, die Hebung dieser Schwierigkeiten ermöglichen!

Bonn, im April 1873.

E. Ketteler.



Inhalt.

Abhandlung I.

(Vergl. Poggendorff's Annalen Bd. CXLIV, S. 109—127.)

Zur Beleuchtung des Doppler'schen Princips.

Mit gegenwärtiger Abhandlung beginne ich eine Untersuchung über den Einfluss der astronomischen Bewegungen auf die optischen Erscheinungen. Ich sehe dabei vorläufig ab von den nur schwer zu constatirenden Aenderungen der Amplitüde und beschränke mich auf die Modificationen, die einerseits die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und andererseits Schwingungsdauer und Wellenlänge erfahren. Sofern nun die Vorgänge der Spiegelung und Brechung ihrem Wesen nach zu den Beugungserscheinungen gehören, diese selbst aber wieder unter den Begriff der Interferenzerscheinungen fallen, so lässt sich das zu entwickelnde Resultat in folgender Form aussprechen:

Der Einfluss der astronomischen Bewegungen auf die Interferenzerscheinungen, soweit er durch Versuche constatirbar ist, bewirkt höchstens eine Verschiebung der einzelnen Streifen gegen einander, nie aber eine Verschiebung des ganzen Systems, d. h. er vermag bei unverändert bleibender Stellung der Mittelfranse eine Veränderung der Fransenbreite zu bewirken. Die Stellung der Mittelfranse ist aber abhängig von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf dem Wege, den die Strahlen durchlaufen, und die Breite der Streifen von der Wellenlänge.

Die Bedingungsgleichungen nun für die Unveränderlichkeit der Mittelfranse verlangen eine solche Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, dass die bewegten Mittel als einfach brechende mit extraordinärem Strahle bezeichnet wer-

den können, deren Wellenfläche durch die Fresnel'sche Hypothese über die Entrainirung des Aethers bestimmt ist. Andererseits führt die unmittelbare und umständliche Ableitung der Breite der Interferenzstreifen zu Formeln, wie sie sich kürzer und eleganter aus einer Verallgemeinerung des Doppler'schen Princips ergeben, das sonach nicht blos für das directe, sondern auch für das gespiegelte, gebrochene und gebeugte Licht als nothwendiges Erklärungsprincip Anerkennung beansprucht.

Von hierher gehörigen Versuchen habe ich selbst mehrere angestellt, die am betreffenden Orte beschrieben und erläutert werden sollen.

Ich beginne mit dem Einfluss der Bewegung des Erschütterungsmittelpunktes auf die Wellenlänge der direct von ihm ausgehenden Strahlen, und zwar wesentlich desshalb, weil ich bei diesem Anlass gewisse Fundamentalsätze der Wellenlehre, die anscheinend noch vielfach missverstanden werden, hervorkehren möchte.

Nachdem früher Petzval [1]) das sogenannte Doppler'sche Princip [2]), demzufolge bei Translation von Ton- oder Lichtquelle längs den in der Richtung derselben sich fortpflanzenden Strahlen Schwingungsdauer und Wellenlänge gleichzeitig und in dem gleichen Verhältniss geändert werden, lebhaft angegriffen, hat neuerdings Klinkerfues wiederholt in den Astronomischen Nachrichten und später in den drei folgenden Schriften: „Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie. Leipzig 1867", S. 22. „Ch. Briot, Mathematische Theorie des Lichtes. Uebersetzt und mit einem Zusatz vermehrt. Leipzig 1867", S. 130. „M. Huggins, Spectralanalyse der Himmelskörper. Deutsch mit Zusätzen. Leipzig 1868." S. 55, dasselbe durch eine neue Theorie zu ersetzen gesucht.

Bekanntlich hat bei ruhendem Erschütterungscentrum die

1) Ueber die Controverse zwischen Petzval und Doppler vgl. den Schluss von Zusatz F.

2) Vgl. Anhang I.



Gleichung der Welle, die einem einfachen Ton, resp. einer homogenen Farbe entspricht, die Form:

$$1. \quad y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + X),$$

unter y die Excursion verstanden, die ein um $x - X$ vom Erschütterungsmittelpunkt abstehendes Theilchen zur Zeit t macht. a ist die Amplitüde, λ die Wellenlänge und v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und λ, v und Schwingungsdauer T sind durch die Relation $\lambda = v\,T$ mit einander verknüpft. Befand sich das Wellencentrum zur Zeit $t = 0$ im Punkte $X = 0$, und wird dasselbe mit der gleichförmigen Geschwindigkeit g in der Richtung des Strahles bewegt, so ist $X = g\,.\,t$. Dies eingesetzt, gestaltet die Gleichung zur folgenden um:

$$1_b. \quad y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}[(v + g)\,t - x].$$

Und das ist nach Klinkerfues der Ausdruck für das durch die Translation geänderte Schwingungsgesetz der oscillirenden Punkte. Die Gleichung ist doppelt periodisch; die Ausschläge wiederholen sich zeitlich nach den Intervallen $T_1 = \frac{\lambda}{v+g} = \frac{v}{v+g}\,T$ und räumlich nach den Strecken $\lambda = v\,T$. Sonach wäre in Folge der Translation zwar die Schwingungsdauer geändert, aber die Wellenlänge dieselbe geblieben, und es gehörten Schwingungsdauer und Wellenlänge nicht mehr als sich gegenseitig bedingend zusammen, wie es die bisherige Wellenlehre verlangt.

Zur Theorie von Klinkerfues hat bereits L. Sohncke in den Astronomischen Nachrichten*) kritische Bemerkungen gemacht. Da indess der Grund des Anstosses nicht durch eine positive Entwicklung gehoben wurde, so hat sich Klinkerfues zur Aufrechthaltung seiner Formel nach neuen Stützen umgesehen. Die seitdem von ihm vorgebrachte Begründung ist im Wesentlichen eine dreifache:

1) Für denjenigen Punkt des Mittels, der von der Ton- oder Lichtquelle gerade erreicht wird, für den also $x = g\,t$, ist $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}\,v\,t = a \sin 2\pi\,\frac{t}{T}$ = Elongation der Quelle. „Ein

*) Nr. 1646, Mai 1867.

Unterschied in der Beziehung würde der Voraussetzung des dauernden Strahles entgegen anzeigen, dass kein dynamisches Gleichgewicht hergestellt sei, sondern noch Discontinuitäten im Strahle Statt finden. . . . . Die Doppler'sche Annahme genügt dieser Bedingung nicht."

II) „Die bekannte Differentialgleichung:

$$2. \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

gilt nur für den Fall der ruhenden Quelle, sie ist für den Fall der Bewegung durch die folgende:

$$2_b. \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = (v+g)^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

zu ersetzen", eine Gleichung, welche mittelst Identificirung der Aethertheilchen mit elastischen Kugeln erhalten und direct aus den Grundsätzen der Elasticitätslehre hergeleitet sein soll; über die erstere dieser beiden Gleichungen wird die Bemerkung gemacht, „dass ihr sehr oft eine grössere Allgemeinheit zugeschrieben wird, als sie in Wirklichkeit besitzt." Denn, heisst es weiter, „sie gilt allerdings für jeden dauernden Strahl, wie complicirt auch die fortgepflanzte Welle, oder wenn wir auf die Ursache der Welle zurückgehen wollen, das Gesetz der von der Lichtquelle ausgeübten Stösse sein möge, also auch für eine sehr complicirte Bewegung der Lichtquelle. Daraus darf aber durchaus nicht geschlossen werden, dass sie für jede, also auch für eine nichtperiodische, der Zeit proportionale Bewegung der Lichtquelle ebenfalls noch gültig sei."

III) Die für den Fall des ruhenden Erschütterungsmittelpunktes geltende Gleichung (1) lässt sich bekanntlich auf folgende Form bringen:

$$y = c \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + s \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x).$$

c und s, die dann natürlich von der Zeit unabhängig sind, sollen nun bei der Bewegung äusserst langsame Aenderungen erleiden, „Aenderungen, welche wir ganz passend mit den Säcular-Aenderungen der Planeten Bahn-Elemente bei den Störungs-Rechnungen vergleichen können. . . . . Es braucht ja nur z. B.

$$c = a_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} g t, \quad s = a_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} g t,$$

worin a_0 eine Constante vorstellt, gesetzt zu werden", so wird:

$$y = a_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} [(v + g) t - x].$$

Die hier nachzuweisende Periodicität wird dann sehr ungezwungen aus der Natur des Leuchtens als einer Bewegung abgeleitet. „Denn nicht nur der Ort, sondern auch die Quantität der von der Lichtquelle mitgetheilten Bewegung ändert sich, wenn die Lichtquelle .... zu einem anderen Aethertheilchen gelangt .... Auf ein Aethertheilchen, welches in dem Momente der directen Einwirkung mit der Lichtquelle die gleiche Geschwindigkeit hätte, würde die Lichtquelle gar nicht wirken." Gibt man das freilich zu, so ist klar, dass diese Aenderungen sich periodisch wiederholen, und dass die Dauer der Periode durch die Gleichung $\lambda = g t$ gegeben ist.

Man bemerkt, dass die Erörterungen von Sohncke Klinkerfues veranlasst haben, seine früheren Ideen von der Erzeugung von Elementarwellen mit bestimmter Schwingungsdauer durch Elementarstösse aufzugeben und die früheren Elementarwellen durch Wellenelemente zu ersetzen. „Die hier (unter II) gegebene Theorie", sagt Klinkerfues selbst, „verdient vor der früheren bei Weitem den Vorzug, weil sie nicht mehr die allgemeinen Consequenzen der Lehre von der Superposition zum Fundamente wählt, sondern statt dessen den aus den Elementen der Elasticitätslehre allgemein bekannten Satz, dass zwei vollkommen elastische Kugeln bei der Berührung ihre Geschwindigkeit austauschen."

Diese Gegenüberstellung ist nun freilich unrichtig. Die zweite Begründung beweist vielmehr, dass es in Betreff des Actes der Bewegungsübertragung, mag diese seitens einer ruhenden oder einer bewegten Lichtquelle erfolgen, an der genügenden Klarheit fehlt, und so ist bei dem der Zeit nach spätesten, dritten Beweis die Interferenzidee wiederum zum Durchbruch gekommen.

Eine Discussion des Doppler'schen Princips muss offenbar mit der Frage nach dem Einfluss der Bewegung auf die

Schwingungen des tönenden oder leuchtenden Punktes selber beginnen. Nun ist einleuchtend, dass z. B. eine rasch bewegte Stimmgabel in jedem Augenblick an die umgebenden Lufttheilchen nicht bloss Stösse austheilt, die sich mit einer gewissen Geschwindigkeit fortpflanzen, sondern dass auch zugleich in Folge der auftretenden Reibung die Amplitüde und selbst das Gesetz ihrer Schwingungen modificirt werden. So lange freilich die Translationsgeschwindigkeit g als kleiner Bruchtheil der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v der Wellen vorausgesetzt wird, so lange dürfen die eben genannten Einwirkungen vernachlässigt werden; die inneren Elasticitätskräfte werden ein entschiedenes Uebergewicht bewahren und die spontanen Schwingungen annähernd bei Ruhe und Bewegung das gleiche Gesetz $y = f(t)$ befolgen.

Unter der nämlichen Voraussetzung darf man ferner absehen von der localen Dichtigkeitsänderung des Mittels in unmittelbarer Nähe der Quelle, und so geschieht denn auch die Uebertragung der unendlich vielen und unendlich kurzen Stösse, durch deren continuirliche Succession die Wellen entstehen, an das leitende Medium in gleicher Weise, mögen sie alle von demselben oder von verschiedenen Punkten des Raumes aus erfolgen. Es darf ja stets die Ton- oder Lichtquelle als während einer unendlich kurzen Zeit ruhend gedacht werden.

Dies vorausgesetzt, lässt sich die wellenförmige Bewegung in keiner anschaulicheren Weise behandeln, als wenn man mit Klinkerfues der Betrachtung eine unendlich lange Reihe sich berührender elastischer Kugeln oder besser noch die von Mach ersonnene, in Pogg. Annalen Bd. CXXXII, S. 174 beschriebene Vorrichtung zu Grunde legt. Da nämlich die Kugeln bloss durch Druck, nicht aber auch durch Zug auf einander wirken können, so ersetzt Mach dieselben durch eine Reihe schwerer Metallcylinder, deren Axen zu je zwei durch ringförmige elastische Stahlfedern verbunden sind.

Jeder von aussen her erfolgende spontane Stoss, den man irgend einem Cylinder ertheilt, pflanzt sich successiv auf alle übrigen fort. Und zwar ist die Geschwindigkeit dieser Uebertragung nur abhängig von der Elasticität und Masse der Fe-

dern und Cylinder, dagegen unabhängig von der Stärke des Stosses. Dabei ist zu beachten, dass zur primären Erschütterung eine gewisse mechanische Arbeit aufgewandt werden muss; diese mechanische Arbeit wandelt sich im beschriebenen Mechanismus in lebendige Kraft um, und diese letztere läuft mit der Erschütterung von Cylinder zu Cylinder. Jeder einzelne also überträgt dieselbe dem folgenden und tritt dann sofort wieder in den Zustand der Ruhe zurück.

Ist nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Stosses unabhängig von seiner Stärke, so ist sie auch gleich für eine fortlaufende Reihe von Stössen von wechselnder Stärke, mag diese in irgend einer periodischen oder unperiodischen Folge gegeben werden. Wird daher ein bestimmter Cylinder der Mach'schen Vorrichtung irgendwie stossweise hin- und hergeführt, so wird jeder folgende Cylinder die Bewegung des ersten genau reproduciren, aber er wird sie um so später antreten, als er weiter von demselben absteht.

Es sei αO Fig. 1 eine beliebige Curve, und ich nehme

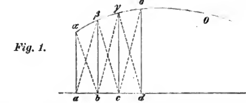


Fig. 1.

an, dass man zur Zeit t_0 dem primären Cylinder plötzlich eine Erschütterung mit der Oscillationsgeschwindigkeit $c_0 = a\alpha$ ertheilt habe. Diese Erschütterung wird sich dem benachbarten Cylinder mittheilen, und nach einer sehr kleinen Zeit $\Delta t = ab \left(= \frac{\Delta x}{v}\right)$ wird dieser die Geschwindigkeit $a\alpha$ gewonnen, folglich die Geschwindigkeit des ersteren, entsprechend etwa der geraden Linie $\alpha\, b$, auf 0 herabgesunken sein. In diesem Augenblick werde ihm mittelst einer zweiten Momentankraft die etwas grössere Geschwindigkeit $c_1 = b\beta$ ertheilt; dieselbe überträgt sich während des folgenden Momentes Δt gleichfalls auf den benachbarten u. s. f. Bei dieser Anschauung wird

also der Verlauf der spontan mitgetheilten Oscillationsgeschwindigkeiten der gebrochenen Linie $a b \beta c \gamma d \ldots$ entsprechen, und es wandern der Reihe nach die lebendigen Kräfte $\frac{1}{2} m c_0{}^2$, $\frac{1}{2} m c_1{}^2$, $\frac{1}{2} m c_2{}^2 \ldots$ mit der nämlichen Geschwindigkeit v über die Cylinderreihe fort*). Die während der Zeit $n \varDelta t$ aufgewandte, gesammte mechanische Arbeit, resp. die währenddess fortgeleitete, aequivalente lebendige Kraft ist also die Summe:

$$\frac{1}{2} m \sum_{t_0}^{t_0 + n \varDelta t} (c_0{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + \ldots .)$$

Hört die spontane Stosskraft endlich zu wirken auf, so folgt dem letzten Stosse sofortige Ruhe.

Anstatt dem primären Cylinder in Intervallen discontinuirliche Momentan-Geschwindigkeiten mitzutheilen, darf man denselben auch continuirlich nach dem Gesetze der Curve $a O$:

$$c = \varphi (t)$$

bewegen. Denn hat derselbe in einem bestimmten Augenblick die Geschwindigkeit $a \alpha = c_0$, und vermehrt sich letztere in irgend einem Zeittheilchen $\varDelta t$ auf $b \beta = c_1$, so lässt sich diese Aenderung auffassen als eine Geschwindigkeitsabgabe der vollen Geschwindigkeit c_0 an die folgenden Cylinder, entsprechend der geraden Linie $a b$, und als gleichzeitige Geschwindigkeitsaufnahme von aussen her um den Betrag c_1, dessen Anwachsen längs der Linie $a \beta$ erfolgt und eine ganz gleiche Zeit in Anspruch nimmt. So laufen denn in jedem Augenblick zwei Strömungen neben einander her, und der Effect ist offenbar der nämliche wie vorhin, als man die Geschwindigkeitsabgabe in endlicher, die Geschwindigkeitsaufnahme in unendlich kurzer Zeit sich bewerkstelligt dachte.

Die während einer bestimmten Zeit seitens der spontanen Erschütterungskraft aufgewandte mechanische Arbeit, resp. die aequivalente fortgeleitete lebendige Kraft ist aber nunmehr:

*) Ich sehe davon ab, dass jede spontane Erschütterung sich in zwei Hälften theilt, die mit den Geschwindigkeiten $\pm v$ nach entgegengesetzten Richtungen fortwandern.

$$\tfrac{1}{2}\, m \int_{t_0}^{t_1} c^2\, dt.$$

Da nun jeder einzelne Cylinder sich den hinter ihm liegenden gegenüber wie ein primär bewegter verhält, so lässt sich das Princip der wellenförmigen Bewegung folgendermassen aussprechen: Bei jeder wellenförmigen Bewegung hat jeder oscillirende Punkt in jedem Augenblick diejenige Oscillationsgeschwindigkeit, die jeder vorhergehende eine bestimmte Zeit früher, nämlich um soviel früher gehabt hat, als die einzelne Erschütterung braucht, um von jenem zu diesem zu gelangen.

Denkt man sich das elastische Mittel aus unendlich vielen und unendlich nahen Punkten gebildet, so lässt sich vorgenanntes Princip in doppelter Weise in die analytische Sprache umsetzen:

Auf unendlich kleine Entfernungen angewandt, lautet es, wenn $y = f(x, t)$, $c = \frac{dy}{dt}$ gesetzt wird:

$$\frac{df(x + \Delta x,\ t + \Delta t)}{dt} = \frac{df(x, t)}{dt},$$

$$\Delta x = v\, \Delta t.$$

Wird die erstere dieser Gleichungen nach t integrirt, so erhält man:

$$f(x + \Delta x,\ t + \Delta t) = f(x, t),$$

und daraus zieht sich der Schluss, dass man in die Formulirung des Princips der wellenförmigen Bewegung anstatt der Oscillationsgeschwindigkeiten ebensowohl die Excursionen aufnehmen darf.

Macht man ferner Anwendung vom Taylor'schen Lehrsatz, so schreibt sich:

$$f(x + \Delta x, t + \Delta t) = f(x, t) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{df}{dt} \Delta t = f(x, t),$$

so dass kommt:

$$\frac{df}{dt} \Delta t = -\frac{df}{dx} \Delta x$$

oder:

$$\frac{dy}{dt} = -v\, \frac{dy}{dx}. \qquad 3.$$

Führt man noch die Oscillationsgeschwindigkeit c ein und beachtet, dass $\frac{dy}{dx}$ gleich der Tangente des Neigungswinkels α ist, den die Wellenlinie in demjenigen Punkte, durch welchen zur Zeit t die Geschwindigkeit c eben hindurchgeht, mit der Abscissenaxe bildet, so hat man für die Schnelligkeit der Fortpflanzung den bemerkenswerthen Ausdruck:

3b. $$v = -\frac{c}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Wird endlich Gleichung 3 beiderseits nach t differentiirt, so ist:

$$\frac{d\frac{dy}{dt}}{dt} = -v\,\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt} = -v\,\frac{d\frac{dy}{dt}}{dx},$$

folglich:

2. $$\frac{dc}{dt} = -v\,\frac{dc}{dx} \text{ oder: } \frac{d^2y}{dt^2} = v^2\,\frac{d^2y}{dx^2},$$

so dass sich dem die Oscillationsgeschwindigkeit enthaltenden Ausdruck 3 ein analog gebildeter für die Geschwindigkeitszuwüchse zuordnet.

Der Gleichung 2, deren Bedeutung für die fortschreitende Wellenbewegung hiernach hinlänglich klargestellt ist, um die Abweichung der Klinkerfues'schen Differentialgleichung 2b. auf eine Nichtbeachtung des Princips der Erhaltung der Kraft zurückführen zu können, lässt sich übrigens eine neue Seite abgewinnen, die sie nämlich zu einer fruchtbaren Verknüpfung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit den elastischen Kräften des Mittels verwendbar macht. Die Beleuchtung derselben gehört indess nicht hieher und mag der Abhandlung VIII zugetheilt werden.

Beziehen wir nun andererseits das Princip der wellenförmigen Bewegung, anstatt auf unendlich kleine, auf endliche Entfernungen, so ergibt sich ebenso unmittelbar wie oben:

4. $$c = \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right)$$
$$y = f\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Die Gleichungen 2 und 4 gelten ebensowohl für einen einzelnen Stoss als für eine beliebige continuirliche Bewegung, sie besagen eben nur, dass in jedem Mittel, für welches sie gelten, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig ist von der Art dieser Bewegung, also speciell für eine periodische

Bewegung unabhängig von dem Rhythmus derselben, folglich auch von der Schwingungsdauer.

Beide Gleichungen verhalten sich zu einander wie Differential- und Integralgleichung. Da das Functionszeichen f ganz unbestimmt geblieben, so haben sie mit der anderweitig bekannten Thatsache, dass es in der Natur pendelartig einfache Schwingungen gibt, und dass zufällig die den Stimmgabeltönen und den homogenen Farben (im dispersionslosen Weltraum) entsprechenden Schwingungen sich durch Sinuscurven ausdrücken lassen, an sich gar nichts zu thun.

Wenn nun die Gleichungen:

$$y = f(t), \quad y = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

für je zwei beliebige Punkte gelten, die um die feste unveränderliche Strecke x von einander abstehen, so beginnt von dem Moment an, in welchem dem ersteren irgend ein Bewegungszustand auf irgend welche Weise mitgetheilt wird, die Weiterleitung desselben und die Bildung der entsprechenden Welle. Im Moment, wo die Zuführung der Bewegung aufhört, hört ebenso plötzlich die Fortbildung der Welle auf, und pflanzt sich nun sozusagen die Ruhe von Theilchen zu Theilchen fort. Die Form des inzwischen gebildeten Wellenstückes hängt ab vom Functionszeichen f *).

*) Bringt man mittelst einer äusseren Kraft den schweren Massenpunkt eines ideellen Pendels etwa nach dem Gesetze $y = a \sin \frac{2\pi}{T} t$ auf eine gewisse Höhe, so beginnt dasselbe eine niemals aufhörende Reihe von Schwingungen. Ertheilt man dagegen einem Punkte eines ideellen elastischen Mittels die nämliche Bewegung, so läuft dieselbe in der Gestalt einer Viertelwelle ununterbrochen weiter. In beiden Fällen also wird dem Princip der Erhaltung der Kraft genügt, nur ist es das eine Mal der nämliche Punkt, der eine unendliche Zeit lang schwingt, das andere Mal sind es fort und fort andere Punkte, auf die diese ewige Bewegung sich für eine endliche Zeit überträgt.

Die Punkte dieses Mittels machen aber nicht desshalb *einfache* Pendelschwingungen, weil von vornherein für jeden derselben die elastische Kraft $\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y$ wäre, sondern weil eben eine pendelförmige Succession der Bewegungsimpulse von aussen her gegeben ist. Man hat vielmehr allgemein: $d^2t \Sigma y = -\Sigma k^2 y$.

Verweilen wir nochmals bei dem bestimmten Beispiel der unendlich langen Mach'schen Cylinderreihe. Ich nenne irgend einen Cylinder den ersten und betrachte weiter die Oscillationen des p^{ten}. Macht derselbe in Folge Einwirkung einer spontanen Kraft in den aufeinander folgenden Augenblicken: t, $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, ... die Excursionen: $f(t)$, $f(t + \Delta t)$, $f(t + 2\Delta t)$..., so werden dieselben successive an die Cylinder $p + 1$, $p + 2$, $p + 3$... übergehen und werden sonach Theile einer Welle.

Da es nun gleichgültig ist, auf welche Weise dem Cylinder p die obige Reihenfolge von Excursionen zugeführt wird, so lässt sich z. B. auch so verfahren, dass man dem Cylinder o mittelst spontaner Einwirkung zur Zeit

$$t - \frac{p\Delta x}{v},\ t + \Delta t - \frac{p\Delta x}{v},\ t + 2\Delta t - \frac{p\Delta x}{v}\ldots.$$

die Excursionen:

$$f(t), \quad f(t + \Delta t), \quad f(t + 2\Delta t)\ldots.$$

ertheilt. Sie alle treffen in richtiger Folge so beim Cylinder p ein, dass derselbe zur Zeit t die beabsichtigten Schwingungen beginnt. Die von p gebildete Welle ist also mit der früheren identisch.

Oder auch bei Anwendung discontinuirlicher Momentanstösse. Man gibt beliebigen Cylindern in bestimmten Augenblicken bestimmte Excursionen, so dass sich etwa entsprechen:

Nr. des Cylinders	Excursion	Zeit
0	$f(t)$	$t - \frac{p\Delta x}{v}$
m_1	$f(t + \Delta t)$	$t - \frac{(p - m_1)\Delta x}{v} + \Delta t$
m_2	$f(t + 2\Delta t)$	$t - \frac{(p - m_2)\Delta x}{v} + 2\Delta t$
m_n	$f(t + n\Delta t)$	$t - \frac{(p - m_n)\Delta x}{v} + n\Delta t.$

Auch jetzt treffen die Excursionen in richtiger Folge bei p ein, und die von p weitergehende Welle hat wiederum dieselbe Form.

Der hier betrachtete Vorgang ist nun kein anderer als derjenige, der in continuirlicher Form in Luft oder Aether bei Bewegung von Ton- oder Lichtquelle vor sich geht.

Es sei $y = f(t)$ die Excursion der Quelle zur Zeit t, sei ferner $\pm g$ die Geschwindigkeit ihrer Translation und $\pm v$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Erschütterung. Zur Zeit o mögen die Ansschläge beginnen, und es sei $y_0 = f(0)$. Ich zähle die Abscissen von demjenigen Punkte an, in dem sich die Quelle in diesem Augenblick befindet, so dass also $x_0 = 0$.

In Folge der Spontanität ihrer Schwingungen ist die Excursion der Quelle am Ende des Zeittheilchens $\varDelta t$ zu $y_1 = f(\varDelta t)$ geworden, und die zugehörige Abscisse sei $x_1 = g \varDelta t$. Inzwischen ist die frühere Erschütterung mit der Geschwindigkeit v um $v \varDelta t$ vorangeschritten, so dass also $x_0 = v \varDelta t$ geworden.

Am Ende der Zeit $2 \varDelta t$ hat die Quelle die Excursion $y_2 = f(2 \varDelta t)$, und die dieser Excursion entsprechende Abcisse ist $x_2 = 2 g \varDelta t$. Mittlerweile ist die Excursion y_1 mit der Geschwindigkeit v fortgewandert, so dass $x_1 = (v + g) \varDelta t$ geworden, und aus demselben Grunde befindet sich die Excursion y_0 in einem Punkte mit der Abscisse $x_0 = 2 v \varDelta t$.

Kurz, es entsprechen sich in den auf einander folgenden Augenblicken die nachstehenden Excursionen und Abscissen:

t	$y_0 = f(0)$	$y_1 = f(\Delta t)$	$y_2 = f(2\Delta t)$	$y_3 = f(3\Delta t)$
0	$x_0 = 0$			
Δt	$= v\Delta t$	$x_1 = g\Delta t$		
$2\Delta t$	$= 2v\Delta t$	$= (v+g)\Delta t$	$x_2 = 2g\Delta t$	
$3\Delta t$	$= 3v\Delta t$	$= (2v+g)\Delta t$	$= (v+2g)\Delta t$	$x_3 = 3g\Delta t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n\Delta t$	$= nv\Delta t$	$= [(n-1)v+g]\Delta t$	$= [(n-2)v+2g]\Delta t$	$= [(n-3)v+3g]\Delta t$

Man hat daher allgemein für die Excursion y_p:

$$t = n\Delta t, \quad y_p = f(p\Delta t), \quad x_p = [(n-p)v+pg]\Delta t.$$

Und wenn man Δt durch $\frac{t}{n}$ ersetzt:

$$y = f\left(\frac{p}{n}t\right)$$

$$x = vt\left[1 - \frac{p}{n}\left(1 - \frac{g}{v}\right)\right]$$

Die Elimination von $\frac{p}{n}$ aus beiden Gleichungen gibt dann zwischen y und x die folgende Relation:

$$5. \qquad y = f\left(\frac{t - \frac{x}{v}}{1 - \frac{g}{v}}\right) = f\left(\frac{vt - x}{v - g}\right)$$

als Gleichung der erzeugten Welle*).

Ist insbesondere das Schwingungsgesetz der bewegten spontanen Quelle das pendelartig einfache, so dass also für sie:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

so erzeugt sie eine Welle von der Form:

$$5_b. \qquad y = a \sin \frac{2\pi}{T} \frac{vt - x}{v - g}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$6. \qquad \frac{v - g}{v} T = T_1, \; (v - g)\, T = \lambda_1,$$

so schreibt sich:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right).$$

Diese Gleichung repräsentirt eine Sinussoide mit doppelter Periodicität; es ist T_1 die Schwingungsdauer und λ_1 die Länge der gebildeten Welle. Da die Lichtquelle im Zustand der Ruhe die Wellenlänge $\lambda = vT$ erzeugt, so leitet man ab:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\lambda_1}{\lambda},$$

es folgt also, dass Schwingungsdauer und Wellenlänge, ganz entsprechend dem Doppler'schen Princip, im gleichen Verhältniss verkürzt sind.

Es genügt übrigens ein viel einfacheres Raisonnement, um zum nämlichen Ziele zu gelangen. Zunächst ist klar, dass bei der Bildung der Welle an die Stelle von $\frac{\lambda}{2}$ eine Strecke:

$$\frac{\lambda}{2} - g\,\frac{T}{2} = \frac{\lambda_1}{2}$$

tritt, und dass sonach $\lambda_1 = (v - g)\, T$. Die Form der Welle ferner bleibt vermöge der von ihr gegebenen Definition con-

*) Während dieselbe hier als in einem cylindrischen Rohre fortschreitend gedacht wird, ist in Zusatz F der allgemeinere Fall behandelt.

stant. Und da jedes Theilchen des Mittels während des Durchgangs einer Welle eine vollständige Oscillation macht, so ergibt sich für die Schwingungsdauer:

$$T_1 = \frac{\lambda_1}{v} = \frac{v-g}{v} T.$$

Vorstehenden Entwickelungen zufolge muss die von Klinkerfues erhaltene abweichende Gleichung (1_b) abgelehnt werden. Und wenn insbesondere behauptet wird, dass die Doppler'sche Annahme nicht der Forderung entspreche, dass für denjenigen Punkt des Mittels, der von der Quelle gerade passirt wird, die Elongation desselben der Elongation der Quelle gleich sei, so lässt sich vielmehr ohne Weiteres zeigen, dass die Gleichung der Welle:

$$y = f\left(\frac{vt - x}{v - g}\right)$$

für den Punkt $x = gt$ in die Gleichung der Spontanschwingungen der Quelle $y = f(t)$ übergeht. — Ja es genügt sogar diese Bedingung für sich allein, um zur Gleichung der modificirten Welle zu gelangen. Hat nämlich diese letztere vorläufig die Form:

$$y = F\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

dann verlangt eben jene Bedingung:

$$f(t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{für } x = gt,$$

also:

$$f(t) = F\left[t\left(1 - \frac{g}{v}\right)\right].$$

Und da diese Beziehung für jedes beliebige t gilt, so schreibt sich auch:

$$f\left(\frac{t}{1 - \frac{g}{v}}\right) = F(t).$$

oder aus demselben Grunde:

$$f\left(\frac{t - \frac{x}{v}}{1 - \frac{g}{v}}\right) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) = y.$$

Unsere Entwicklungen beruhten auf der Annahme, dass der Bruch $\frac{g}{v}$ eine sehr kleine Grösse sei. Ist das nicht der Fall, so können, wie bereits angedeutet wurde, bei der Bewegung von Ton- und Lichtquelle Momente auftreten, die eine unmittelbare Identificirung der Erscheinung mit dem analogen Vorgange auf der Mach'schen Maschine nicht mehr gestatten. Sieht man von dem Einfluss der Bewegung auf die Schwingungen der Quelle selbst ab, so bleibt noch zu beachten, dass die rasche Translation eine sich auf eine gewisse Entfernung hin erstreckende Dichtigkeitsänderung des Mittels hervorruft, und dass die Schwingungen sich zunächst an diese verdichtete resp. verdünnte Umgebung übertragen. Die Theilchen innerhalb derselben haben eine Translationsgeschwindigkeit, die alle Zwischenstufen umfasst zwischen g und 0, und ebenso liegt ihre Dichtigkeit zwischen einem gewissen Maximal-, resp. Minimalwerth und 1, so dass die entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit von $v \pm \nu$ allmählig in v übergeht. Nun behalten zwar unsere Betrachtungen ihre Gültigkeit, wenn man sie in continuirlicher Weise auf jede unendlich dünne Schicht der genannten Umgebung überträgt, aber andererseits wird der Fehler, der durch die Vernachlässigung dieser Verhältnisse entsteht, durchweg ein geringer sein.

Was nun zum Schluss die „nicht geringe Schwierigkeit" betrifft, auf die man nach Klinkerfues hinsichtlich der Brechung der (durch die Bewegung der Lichtquelle modificirten) Farben stossen soll, so existirt dieselbe nur für seine Theorie.

Nach der gewöhnlichen Wellenlehre verhält sich jeder Punkt eines Strahles den folgenden gegenüber als secundärer Erschütterungsmittelpunkt. So also auch ein Punkt der Gränzfläche zweier verschieden dichter Mittel, welche durch die Geschwindigkeiten v, v', die Wellenlängen λ, λ' und durch das entsprechende Brechungsverhältniss n characterisirt seien. Daraus (das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer fällt mit dieser Anschauung zusammen) resultiren dann sofort die bekannten Gleichungen: $n = \frac{v}{v'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$.

Klinkerfues vermag freilich die in Rede stehende Vorstellung, die nach seiner Theorie für die Punkte desselben Mittels unrichtig ist, auch nicht für den Vorgang der Brechung zu adoptiren.

Es hatte ihn die Form seiner Gleichung:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} [(v+g)\,t - x]$$

in Verbindung mit den unter (II) genannten Gründen zu der Interpretation geführt, dass die Welle als ein gewisser „Integralwerth" mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v+g$ fortrücke. Dem entsprechend wird dann die Geschwindigkeit im zweiten Mittel $= v' + g$ gesetzt, und nun wird man plötzlich, ohne zu erfahren, wie sich denn der Uebergang vollzieht, mit der Relation:

$$n = \frac{v+g}{v'+g}$$

überrascht.

Klinkerfues hat die angedeutete Modification des Brechungsgesetzes später als unwahrscheinlich aufgegeben. An ihre Stelle setzt er die unter (III) mitgetheilte periodische Modification der Amplitüde und vermuthet, dass die Dauer dieser Periode $\left(= \frac{\lambda}{g}\right)$ für alle Medien gleich bleibt. Dem entsprechend wäre die Gleichung der Welle im zweiten Medium:

$$y = a_0 \cos \frac{2\pi g t}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda'} (v' t - x)$$
$$+ a_0 \sin \frac{2\pi g t}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda'} (v' t - x).$$

Wird noch die Beziehung $\frac{v}{v'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$ berücksichtigt, so kommt:

$$y = a_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(v' t + \frac{v'}{v} g t - x\right),$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit des Integralwerthes „Welle" im zweiten Medium $v' + \frac{v'}{v} g$ und entsprechend dem früheren Schlusse:

$$n = \frac{v+g}{v' + \frac{v'}{v} g} = \frac{v}{v'}.$$

Sonach würde der Brechungsindex der Welle dem Brechungs-

index ihres Differentiales gleich, und es bliebe bei Translation der Lichtquelle die Brechung ungeändert. Schreibt man:

$$\frac{1}{n^2} = A + \frac{B}{\lambda'^2} + \ldots,$$

und dehnt diese Unabhängigkeit von der Bewegung auf sämmtliche Coëfficienten $A, B \ldots$ aus, so wird jede Lichtart, sofern ja auch ihre Wellenlänge λ' unbeeinflusst bleiben soll, im Spectrum ihre Stelle behalten. Nun ist es die Schwingungsdauer, welche die Empfindung der Farbe bestimmt; dieselbe ändert sich von T' in $\frac{v-g}{v}\, T$. Es bewirkte also die Translation der Lichtquelle, dass die Absorptionslinien ihres Spectrums sich in unveränderter Lage auf einem farbigen Hintergrunde zeigen müssten, der gegen sie selbst verschoben wäre.

Nach der gewöhnlichen Theorie sind selbstverständlich A und B constant; die Translation der Lichtquelle bewirkt eine Aenderung von Schwingungsdauer und Wellenlänge zugleich, und so hat man im Spectrum zwar auch die Farbe geändert, aber gleichzeitig mit solcher Brechung, dass die resultirende Farbe wieder mit ungeänderter Brechung zum Vorschein kommt; gegen diesen scheinbar unveränderten Hintergrund sind dann die Absorptionslinien verschoben.

Wie eine genaue experimentelle Prüfung der beiderseitigen Resultate ausfallen werde, darüber kann die Entscheidung wohl nicht schwer fallen. Eine Beleuchtung der theoretischen Ansichten schien aber wünschenswerth, da die Schlüsse von Klinkerfues schon mehrfach Anklang gefunden haben.

Bevor wir zu einer Verallgemeinerung des Doppler'schen Princips übergehen, soll eine Behandlung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in bewegten Mitteln vorangeschickt werden.

ZUSATZ A.

Experimentelle Bestätigung des Doppler'schen Princips und Anwendungen desselben.

Da die grössten Geschwindigkeiten, die auf der Erde zu Gebote stehen, verschwindend klein sind gegen die Geschwindigkeit des Lichtes, so lässt sich begreiflicher Weise eine directe Bestätigung des Doppler'schen Princips nur auf akustischem Gebiete ermöglichen.

Unterscheiden wir wieder zwischen der Modification der Schwingungsdauer oder Schwingungszahl und derjenigen der Wellenlänge, so bezieht sich die Mehrzahl der ausgeführten Versuche auf die Beobachtung der ersteren.

Der Erste, welcher das Doppler'sche Gesetz experimentell zu verificiren strebte, war Buijs Ballot.*) Derselbe stellte Versuche an auf der Eisenbahn zwischen Utrecht und Maarsen. Während eine Locomotive an drei Stationen vorüberfuhr, wurde abwechselnd entweder auf diesen Stationen geblasen und der gehörte Ton durch Musiker auf der Locomotive aufgezeichnet, oder es wurde auf der Locomotive geblasen und der auf den Stationen gehörte Ton beobachtet. Die Geschwindigkeit g der Locomotive wurde in der Weise bestimmt, dass der Zeitpunkt aufgezeichnet ward, wo jedesmal hinter einer festen im Wagen gewählten Linie eine Milliarie verschwand. Der Werth von v wurde jedesmal dem Wetter entsprechend berechnet und dabei vermehrt um die Geschwindigkeit des Windes, zerlegt nach der Richtung vom Instrumente zum Beobachter. So konnte das Resultat der Beobachtung mit dem nach der Theorie erwarteten verglichen werden, und die erhaltenen Zahlenwerthe

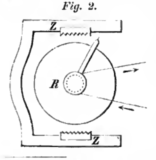
*) Pogg. Ann. Bd. 66, S. 321.

zeigen, dass letztere im allgemeinen bestätigt wird. Im Einzelnen freilich sind die Unsicherheiten nicht unbeträchtlich, sie werden von Ballot auf Verstimmungen der Instrumente, auf ungleiche Geschwindigkeit der Locomotive und auf physiologische Irrthümer zurückgeführt.

Ganz ähnliche Beobachtungen wurden kurz darauf von Scott Russel [1]) auf englischen und von Montigny [2]) auf belgischen Bahnen wiederholt. Russell operirte mit Geschwindigkeiten der Locomotive von 50—80 engl. Meilen pro Stunde, und er benutzte anscheinend Töne von sehr verschiedener Höhe (nach Fizeau die Töne der Locomotivpfeife). Ueberall und stets wurde wieder der kommende Ton bedeutend höher, der gehende bedeutend niedriger gehört als der bei stillstehender Tonquelle oder stationärem Beobachter. Zugleich macht Russel auf den auffallenden und leicht zu constatirenden Unterschied aufmerksam, wo ein Beobachter den directen und den von einer Wand, etwa der Façade eines Tunnels, reflectirten Ton zugleich vernimmt.

Eine weitere Bestätigung erhielt die Doppler'sche Theorie in Frankreich durch einen Versuch Fizeau's [3]), der zwar auch in diese Zeit hineinfällt, aber in extenso erst weit später veröffentlicht worden ist. Fizeau construirte einen Apparat, der gewissermassen die Umkehrung des Savart'schen gezahnten Rades ist. Ein Rad *R* (Fig. 2) lässt sich mittelst Schnurlaufs in sehr rasche Rotation versetzen; dasselbe trägt einen verlängerten Arm, an dessen Ende ein Cartonblättchen befestigt ist, das bei der Rotation gegen die Zähne der beiden fest aufgestellten Zahnreihen *Z* anschlägt und dadurch einen Ton hervorruft. Der Radius des Rades betrug $1/2$ Meter, und die beiden

Fig. 2.



1) Nach Mittheilung in Moigno's Repertoire d'optique moderne. Jahrg. 1850.

2) Bullet. de l'Acad. de Bruxelles 1848, Pt. II, p. 378.

3) Ann. de chim. 4me Série, t. XIX, Fevr. 1870.

Zahnreihen hatten auf einem Bogen von 20° je 5 Zähne. Denkt man sich Scheibe und Federchen in rascher Bewegung, so wird ein einige Meter entfernt aufgestellter Beobachter z. B. auf der einen Seite den Ton *c* und auf der andern den Ton *e* hören müssen. Dabei hat man sich natürlich sorgfältig vor störender Reflexion zu hüten.

Heisst n die Schwingungszahl des unmodificirten, n' die des modificirten Tones, v die Schallgeschwindigkeit und g, g' die Geschwindigkeit von Tonquelle und Beobachter, so gelten die beiden Formeln:

$$\text{I.} \quad \frac{n'}{n} = \frac{v}{v - g}, \qquad \text{II.} \quad \frac{n'}{n} = \frac{v + g'}{v}.$$

Fizeau hat mittelst derselben — deren Gültigkeit auch für verhältnissmässig bedeutende Geschwindigkeiten g, g' vorausgesetzt — diese Geschwindigkeiten für den Fall berechnet, dass die Erhöhung, resp. Vertiefung des gehörten Tones ein genaues musikalisches Intervall beträgt. Bei dem Interesse, welches diese Zahlen immerhin haben, will ich sie hier mittheilen.

		g^m	g'^m
Erhöhung	Octave	170	340
	Quinte	113,3	170
	Grosse Terz	68	85
	Gr. ganzer Ton	37,8	42,5
	Halbton	21,25	22,6
Fundamentalton		0	0
Vertiefung	Halbton	22,6	21,25
	Gr. Ganzton	42,5	37,8
	Grosse Terz	85	68
	Quinte	170	113,3
	Octave	340	170

Bewegen sich Tonquelle und Beobachter gleichzeitig mit der Geschwindigkeit g, oder erregt man die beiden Töne des Apparates zusammen, so gilt die Formel:

$$\frac{n''}{n'} = \frac{v - g}{v + g}.$$

Und dann erhält man für nachstehende Intervalle die folgenden zugehörigen Geschwindigkeiten in Metern:



Halbton	10,97	Quinte	68
Gr. ganzer Ton	20	Sexte	85
Kleine Terz	30,9	Septime	103,5
Grosse Terz	37,8	Octave	113,3
Quarte	48,6	Doppeloctave	204

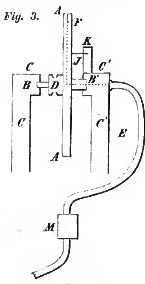
Praktisch gelingen nach Fizeau die drei ersten Fälle sehr gut, die folgenden aber schon schwieriger. Bei grosser Geschwindigkeit versagen die Cartonstreifen ihren Dienst.

Nach dem Vorgange von Babinet stellte Mach *) einige Versuche an mit Kugeln, die er nahe an sich vorüberschiessen liess, und deren pfeifenden Ton er beobachtete. Beim Vorüberfliegen hörte er den Ton plötzlich aus der Höhe in die Tiefe fallen.

Später construirte er einen Apparat, der fast völlig mit dem oben beschriebenen von Fizeau übereinstimmt, sich indess der grossen Reibungswiderstände wegen nicht recht bewährte. Mach hält aber sonderbarer Weise das Gelingen dieses Experimentes nicht für überzeugend, „indem sich hier die Tonquelle nicht wirklich, sondern nur imaginär bewegt."

Der folgende Versuch dagegen gelang vollkommen. Eine Stange AA' (Fig. 3) von 6' Länge, welche mit einem horizontalen Zapfen BB' in dem Lager CC' läuft, kann mittelst der Rolle D durch Schnurlauf mit dem Schwungrade einer Drehbank verbunden und in schnelle Rotation versetzt werden. Der dickere Theil des Zapfens B' steckt luftdicht in einer Stopfbüchse $C'C'$ und ist mit einer Axenbohrung versehen. Zur Stopfbüchse führt ein von einem Blasebalg herkommendes Rohr E, und die comprimirte Luft strömt durch die Axenbohrung des Zapfens in eine Längsbohrung der Stange AA' bis an das eine Ende derselben. Hier ist ein Schnarrpfeifchen F eingesetzt, ein gewöhn-

Fig. 3.



*) Pogg. Ann. Bd. 112, S. 66 und Bd. 116, S. 335.

liches Stimm-A, wie es bei Orchestern gebraucht wird. K ist ein elastisches Plättchen, welches durch den mit der Stange AA' verbundenen Stift I angeschlagen wird, und wodurch man die Zahl der Umläufe in einer gewissen Zeit bestimmen kann.

Versetzt man Blasebalg und Drehbank zugleich in Thätigkeit und stellt sich in der Ebene der Rotation auf, so hört man den sonst vollkommen constanten Ton sogleich auf- und abschweben. Und wenn die Rotation beschleunigt wird, so vergrössert sich zugleich die Tondifferenz. Verlängert man dagegen das Zuleitungsrohr und bringt das Ohr an eine in dasselbe eingeschaltete und mit einer Kautschukmembran versehene Kapsel M, so hört man durch dieselbe einen intensiven schönen constanten Ton, während man von aussen bedeutende Schwankungen wahrnimmt. Für das Innere des Apparates besteht eben relative Ruhe, und daher ist bei dieser Art zu beobachten die Schwingungsdauer constant.

Vor Kurzem endlich haben König in Paris und Alfred M. Mayer in Hoboken (Vereinigte Staaten) auch die Modification der Wellenlänge in's Auge gefasst und dieselbe in folgender Weise constatiren können.

Mayer*) benutzte vier mit Resonanzkästchen versehene Stimmgabeln, die mit der grösstmöglichen Sorgfalt unter Anwendung eines Chronographen so gegen einander abgestimmt waren, dass zwei derselben vollkommen unisono vibrirten und die beiden übrigen mit denselben in der Secunde zwei Schwebungen erzeugten. Während jedoch die dritte Gabel in der Secunde zwei Schwingungen weniger machte als die beiden ersteren, machte die vierte Gabel zwei Schwingungen mehr als dieselben. War also die Schwingungszahl von 1 und 2 gleich 256, so war die von 3 gleich 254 und die von 4 gleich 258.

Es wurde nun etwa Gabel 1 vor eine Laterna magica gestellt und zwar so, dass eine kleine, mittelst eines Coconfadens aufgehängte (möglichst abgerundete, gefirnisste) Kork-

*) Pogg. Ann. Bd. 146, S. 110.

kugel eine Zinke der Stimmgabel kaum berührte. Das Bild der Gabel und des Kügelchens wurde auf einen Schirm geworfen und beobachtet. Sobald dann die Gabel irgendwie, z. B. durch die Oscillationen eines entfernten Tones von ganz gleicher Höhe, in leises Mitschwingen versetzt wird, stösst sie sofort das Kügelchen ab.

Es geschah dieses, als man die unisono schwingende Gabel 2 in einer Entfernung von 30 bis 60 Fuss von Gabel 1 zum Tönen brachte. Schlug man dagegen, während man auf 1 losschritt, die in der Hand gehaltene Gabel an und setzte sie, sobald die Bewegung gleichförmig geworden, auf ihr Kästchen, so blieb die Kugel in Ruhe. Sie sprang dann in dem Moment ab, in dem die Bewegung plötzlich unterbrochen wurde.

Als ferner Gabel 3 mit 254 Schwingungen in derselben anfänglichen Entfernung angeschlagen wurde, blieb sie ohne Einwirkung auf Gabel 1 und die Kugel. Näherte man sich dann derselben, so wurde die Kugel, sobald die gehörige Geschwindigkeit von 8—9 Fuss erreicht war, plötzlich von Gabel 1 abgestossen. Wenn man dagegen diese Geschwindigkeit sehr viel steigert oder verringert, so bleiben die Vibrationen von 3 ohne Wirkung auf 1.

Alle diese Versuche wurden mit Vertauschung der Gabeln und mit Vertauschung der Bewegungsrichtung wiederholt, und der Effect entsprach stets der Theorie.

Nach Radau [1]) lässt sich das von Mayer angewandte Kügelchen entbehren und das Mitschwingen der einen der beiden Gabeln geradezu direct wahrnehmen.

König [2]) hatte bereits früher einen Schritt weiter gethan, sofern er selbst die Modification einer Interferenzerscheinung der Schallwellen, nämlich der Schwebungen, in präciser Weise constatirte. Denkt man sich der Einfachheit wegen zwei Stimmgabeln von den Schwingungszahlen $n_1 = \frac{1}{T_1}$ und $n_2 = \frac{1}{T_2}$ im

1) Carl's Repertorium für Experimentalphysik. Bd. VIII, S. 46.

2) König, Catalogue des appareils d'acoustique (1865) — Pisco, die neueren Apparate der Akustik, S. 224.

gleichen Augenblick angeschlagen und von dem gleichen Punkt aus mit den Geschwindigkeiten g_1, resp. g_2 bewegt, so hat man für den resultirenden Ausschlag der erzeugten Wellen:

$$y = a_1 \sin 2\pi \frac{n_1}{1 - \frac{g_1}{v}}\left(t - \frac{x}{v}\right) + a_2 \sin 2\pi \frac{n_2}{1 - \frac{g_2}{v}}\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Sind die Amplitüden gleich und setzt man:

$$\frac{n_1}{1 - \frac{g_1}{v}} = n'_1 = n + \alpha, \qquad \frac{n_2}{1 - \frac{g_2}{v}} = n'_2 = n - \alpha,$$

wo hier unter α eine kleine Grösse verstanden werde, so geht der Ausschlag über in:

$$y = 2a \cos 2\pi\alpha \left(t - \frac{x}{v}\right) . \sin 2\pi n \left(t - \frac{x}{v}\right).$$

D. h. man hört einen Ton, dessen Schwingungszahl n das arithmetische Mittel aus den modificirten Schwingungszahlen der beiden gegebenen Töne ist, und dessen Amplitüde den variablen Werth hat:

$$A = 2a \cos 2\pi\alpha \left(t - \frac{x}{v}\right) = 2a \cos \pi (n'_1 - n'_2)\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Das Ohr vernimmt also Anschwellungen oder Stösse in Intervallen, die bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$(n'_1 - n'_2)\left(t' - \frac{x}{v}\right) = Z, \; (n'_1 - n'_2)\left(t'' - \frac{x}{v}\right) = Z + 1.$$

Ein Intervall ist folglich gleich:

$$\tau = t'' - t' = \frac{1}{n'_1 - n'_2},$$

und die Zahl der Stösse pro Secunde beträgt:

$$\nu = n'_1 - n'_2 = \frac{n_1}{1 - \frac{g_1}{v}} - \frac{n_2}{1 - \frac{g_2}{v}}$$

oder genähert:

$$\nu = n_1 - n_2 + n \frac{g_1 - g_2}{v}$$
$$= n_1 - n_2 + \frac{g_1 - g_2}{\lambda}.$$

König benutzte zwei Gabeln, die resp. 508 und 512 Schwingungen gaben, also in der Secunde vier Stösse lieferten, wenn beide an ihrem Platze blieben, also $g_1 = g_2 = 0$ war. Nähert man dann die tiefere Gabel dem Ohr eines sta-

tionären Beobachters mit einer Geschwindigkeit $g_1 = 65$ Centimeter ($= 2$ Fuss), welche Strecke ihrer Wellenlänge gleichkommt, so erscheint sie um eine Schwingung höher, und es geht eine Schwebung verloren; man hört also bloss drei Stösse in dieser Secunde. Wird dagegen die nämliche Gabel in der folgenden Secunde ebenso schnell vom Ohre entfernt, so scheint sie um eine Schwingung tiefer, nud man hört jetzt fünf Stösse statt vier. Nach König genügt es schon, die eine Stimmgabel in der Hand zu halten, und während man mit den Angen ein Secundenpendel verfolgt, ihr eine hin- und hergehende Bewegung zu ertheilen. Nach einiger Uebnng hört man dann abwechselnd drei oder fünf Stösse in der Secnnde.

Würde die ruhende Gabel gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung bewegt, so würde sich der Effect verdoppeln. Man erreicht indess dasselbe, wenn beide Gabeln in einiger Entfernung fest aufgestellt werden nnd man entweder das Ohr oder einen mit dem Ohr durch einen Kautschukschlauch verbundenen Resonator zwischen ihnen hin- und herbewegt. Bezeichnet man für diesen Fall den gegebenen Abstand der beiden Gabeln dnrch $2d$ nnd den Abstand des Ohres von der Mitte desselben durch x ($< d$), so hat man:

$$y = a\left\{\sin 2\pi n_1 \left(t - \frac{d-x}{v}\right) + \sin 2\pi n_2 \left(t - \frac{d+x}{v}\right)\right\},$$

und wenn das Ohr mit der Geschwindigkeit g bewegt wird, so dass $x = gt$:

$$y = a\left\{\sin 2\pi n_1 \left[\left(1 + \frac{g}{v}\right)t - \frac{d}{v}\right] + \sin 2\pi n_2 \left[\left(1 - \frac{g}{v}\right)t - \frac{d}{v}\right]\right\}$$

Setzt man noch:

$$n_1 = n + \alpha, \quad n_2 = n - \alpha$$

und vernachlässigt das kleine Product $\frac{\alpha}{n}\,\frac{g}{v}$, so erhält man schliesslich:

$$y = 2a \cos 2\pi \left[\alpha\left(t - \frac{d}{v}\right) + n\,\frac{g}{v}\,t\right] \sin 2\pi n\left(t - \frac{d}{v}\right)$$

und für die Anzahl Stösse pro Secunde:

$$\nu = n_1 - n_2 + 2n\,\frac{g}{v}.$$

Dieselbe nimmt also doppelt so rasch zu wie im vorigen Falle, für den $g_2 = 0$ war.

Dieser letzte Versuch lässt sich übrigens auch mit einer einzigen Gabel ausführen. Stellt man sich nämlich in geringer Entfernung von einer festen Wand auf und führt eine in Schwingungen versetzte Gabel zwischen der Wand und dem Ohre hin und her, so hört man Schwebungen in Folge der Reflexion; das Gleiche tritt ein, wenn man das Ohr zwischen der Wand und der ruhenden Gabel bewegt. Man vernimmt hierbei wiederum zwei Stösse auf 512 Schwingungen bei einer Geschwindigkeit von 2 Fuss in der Secunde, also genau gleich viel wie bei der Bewegung des Ohres zwischen den Gabeln.

Was schliesslich den Einfluss der Bewegung auf die Klangfarbe betrifft, so liesse sich allenfalls anführen, dass Dufour [1]) einer Behauptung Canderay's entgegen constatirte, dass sämmtliche Töne eines in einem Eisenbahnwagen aufgehängten Violoncello's während der Fahrt gleichgut gehört werden, während allerdings, wenn das Instrument auf dem Fussboden steht, der tiefe Ton inmitten des allgemeinen Geräusches aus physiologischem Grunde verschwindet. Doch gehört diese Erscheinung wohl kaum hieher.

Nachdem so das Doppler'sche Princip auf akustischem Gebiete bewahrheitet ist, darf man dasselbe mit um so mehr Recht auf das optische übertragen, als der Aberrationslehre zufolge der Lichtäther nicht bloss unbeweglich, sondern zugleich völlig durchdringlich ist, so dass innerhalb weiter Gränzen keine Compressionen und Dilatationen um die sich bewegende Lichtquelle herum entstehen.

Zwar hat Ångström [2]) eingewendet, es müsste alsdann das Spectrum eines zwischen Metallkugeln überspringenden elektrischen Funkens anders ausfallen, wenn die Verbindungslinie der beiden Elektroden vertical, und anders, wenn sie geneigt sei. Eigentlich müsse sich das Metallspectrum verdoppeln, da die glühenden vom einen Pol fortgeschleuderten

1) Bull. Soc. Vaud. T. IX, p. 28.
2) Pogg. Ann. Bd. 94, S. 141.



Theilchen sich mit einer Geschwindigkeit von 80—90 Meilen dem Beobachter nähern, während die des andern sich ebenso schnell entfernen. Stelle man dagegen das Experiment wirklich an, so bemerke man im Spectrum gar keine Veränderung. — Das Gewicht dieses Einwurfs könnte man zugeben, wenn eben die Annahme jener doch immerhin willkürlich hingestellten grossen Geschwindigkeit gesicherter wäre als die eines Princips, dessen optische Anwendbarkeit sich auf indirectem Wege zweifellos darthun lässt.

Es liegt nahe, die Spectra der Sonne und der Fixsterne auf die etwaige Verschiebung ihrer Linien zu untersuchen und von der Grösse dieser Verschiebung auf eine entsprechende Bewegung zurückzuschliessen.

Nachdem schon Secchi mit verhältnissmässig unvollkommenen Instrumenten den Fixsternhimmel geprüft und bezüglich der Sterne von der Gruppe des Sirius und ebenso der Gruppe α Orionis keine bemerkenswerthe Verrückung gefunden hatte, gelang es Huggins*), dieselbe am Spectrum des Sirius wahrscheinlich zu machen. Es wurde nur die der Wasserstofflinie F entsprechende Linie genau beobachtet und mit der Wasserstofflinie einer Geissler'schen Röhre verglichen. Die Siriuslinie war bedeutend breiter, und ihre Mitte fiel nicht mit der der Wasserstofflinie zusammen, sondern stand von derselben um 0,04 der Mikrometertheilung ab. Dass dieselbe wirklich dem Wasserstoff angehört, dafür spricht der Umstand, dass sich im Roth des Siriusspectrums noch eine andere mit einer Wasserstofflinie (C) coincidirende vorfindet, die aber sehr wenig intensiv ist. Da die Siriuslinie bedeutend breiter war, so musste gezeigt werden, dass auch die Wasserstofflinie sich gleichmässig nach beiden Richtungen auszudehnen vermag, wenn etwa seine Dichtigkeit sich steigert. Es wurde das festgestellt, und dann unter Annahme der Identität der beiden Lichtquellen mit Zugrundelegung der Wellenlänge $\lambda = 0,^{mm}0004865$ für den Sirius eine Bewegung berechnet, deren Richtung von der Erde abgewandt, und deren relative Geschwindigkeit 41,5

*) Phil. Transact. 1868, p. 529.

engl. Meilen (= 66,6 Kilometer) beträgt. Zieht man die Bewegung der Erde (12 Meilen) mit in Rechnung [1]), so muss man dem Sirius eine Eigenbewegung zuschreiben, durch die er sich mit der Geschwindigkeit von 29,4 engl. Meilen von der Erde entfernt.

Huggins [2]) hat diese Untersuchung in neuerer Zeit mit einem vervollkommneten Instrumente fortgesetzt und sie auf andere Sterne ausgedehnt. Seine Resultate sind in den beiden folgenden Tabellen enthalten.

Sterne, welche sich von der Sonne entfernen.

Name des Sternes	Verglichen mit	Scheinbare Bewegung	Bewegung der Erde	Bewegung von der Sonne
		Engl. Meilen per Secunde	Engl. Meilen per Secunde	
Sirius	Wasserstoff	26 bis 36	— 10 bis 14	18 bis 22
Betigeuze	Natrium	37	— 15	22
Rigel	Wasserstoff	30	— 15	15
Castor	»	40 » 45	— 17	23 » 28
Regulus	»	30 » 35	— 18	12 » 17
β im Grossen Bär	»			
γ » » »	»	30	— 9 » 13	17 » 21
ε » » »	»			
ζ » » »	»			
β im Löwen . . .	»			
η im Grossen Bär	»			
Spica	»			
Gemma	»			
Prokyon	»			
Capella	»			
Aldebaran? . . .	Magnesium			
γ in Cassiopeia .	Wasserstoff			

1) Mit Unrecht, wie man später sehen wird, bemerkt Mascart (Ann. de l'Ec. Norm. No. 3, 1872) in einer Anmerkung auf pag. 162: „M. Huggins a attribué ce déplacement au mouvement relatif de Sirius et de la Terre. Je crois que l'interprétation de M. Huggins est exacte, mais il importe de remarquer qu'elle est contraire à la formule de Fresnel et à l'expérience d'Arago, d'après lesquels le mouvement de la Terre serait sans influence.

2) Proc. Roy. Soc. XX, 1872. Phil. Mag. Februarheft 1873, S. 140.

Sterne, welche sich der Sonne nähern.

Name des Sternes	Verglichen mit	Scheinbare Bewegung	Bewegung der Erde	Bewegung gegen die Sonne
		Engl. Meilen per Secunde		
Arcturus	Magnesium	50	+ 5	55
Wega	Wasserstoff	40 bis 50	+ 3,9	44 bis 54
α im Schwan . . .	»	30	+ 9	39
Pollux	Magnesium	32	+ 17	49
α im Grossen Bär	»	35 » 50	+ 11	46 » 60
γ im Löwen . . .	»			
ε in Bootes . . .	»			
γ im Schwan . . .	Wasserstoff			
α im Pegasus . .	»			
γ im Pegasus? . .	»			
α in Andromeda .	»			

Was insbesondere den Sirius betrifft, so stimmt die jetzige Beobachtung aus freilich unerklärten Gründen mit der älteren nicht sonderlich überein. Andererseits bemerkt auch Vogel [1]), dass es ihm am 22. März 1871 bei ganz vorzüglicher Luft gelungen, die Nichtcoincidenz der drei Wasserstofflinien mit den entsprechenden des Siriusspectrums zu sehen. Er berechnet daraus „die Geschwindigkeit, mit welcher sich Sirius von der Erde bewegt, zu 10,0 Meilen in der Secunde, wogegen Prokyon sich 13,8 Meilen in der Secunde von unserer Erde entfernen würde.“

Die Einrichtung der Spectroskope vervollkomnet sich jetzt von Jahr zu Jahr, und es ist nicht schwierig mehr, den zwanzigsten bis dreissigsten Theil des Abstandes der beiden D-Linien sehr genau zu messen. Setzt man mit Thalén [2])

$$\lambda_{D_2} = 0{,}^{mm}0005895.0$$
$$\lambda_{D_1} = 0{,}^{mm}0005889.0$$
$$\Delta = 6.0$$

so differiren beide von einander um 0,60 Milliontel Millimeter, ein Abstand, dem als Verschiebung eine Geschwindigkeit der Lichtquelle von 304 Kilometer entsprechen würde. Bewegungen, die mit dieser Geschwindigkeit vergleichbar sind, existiren

1) Astron. Nachr. No. 1864.

2) Mémoire sur les longueurs d'onde des raies métalliques. Upsal 1868.

nun anscheinend auch bei der Protuberanzbildung auf der Sonne. Die ungeheuren Geschwindigkeiten, die man mittelst derartiger Beobachtungen bis jetzt erhalten hat, (200—300 Kilometer) sind indess immer noch kleiner als diejenigen, welche man mittelst der directen Teleskopbeobachtung ableitet.

Da sich ferner aus der Umdrehungszeit der Sonne um ihre Axe für einen Punkt des Aequators eine Rotationsgeschwindigkeit von 1,92 Kilometer (nahezu $^1/_4$ geograph. Meile) berechnet, so wird z. B. die *C*-Linie am Ostrande, der sich dem Beobachter nähert, sich nach dem Violett, am Westrande sich nach dem Roth zu verschoben zeigen müssen. Secchi[1]) hat Beobachtungen dieser Art mehrfach ausgeführt und eine solche Verschiebung thatsächlich wahrgenommen. — Für solche Untersuchungen empfiehlt Zöllner[2]) das von ihm construirte Reversionsspectroskop, d. h. ein mächtig wirkendes gewöhnliches Spectroskop, dessen Beobachtungsfernrohr durch Anbringung eines sogenannten Reversionsobjectives oder Reversionsoculars vom leuchtenden Spalt zwei sich überdeckende Spectren von entgegengesetzter Farbenfolge entwickelt. Von grösserer Schärfe ist das erstere; es besteht aus einem diametral zerschnittenen Objectiv, dessen beide Hälften sich mittelst Schrauben einander nähern oder von einander entfernen lassen. Vor der einen derselben ist ein rechtwinkliges Reflexionsprisma derart angebracht, dass dessen Hypotenusenfläche dem Spalte, der Schnittfläche der Linse und der optischen Axe des Rohres parallel ist. Die beiden entstehenden Spectren lassen sich also nach Willkür über und gegen einander verschieben, folglich auch so einstellen, dass für eine bestimmte Farbe die beiden gleichen Linien eines jeden Spectrums coincidiren. Wird dann durch Bewegung die Wellenlänge dieser Linie geändert, so verdoppelt sie sich und gibt eine doppelt so grosse Verschiebung wie im gewöhnlichen Spectroskope. In der letztcitirten Abhandlung findet man eine perspectivische Zeichnung

---

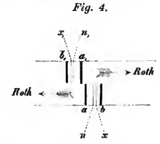
1) P. A. Secchi, Die Sonne. Deutsch herausgegeben von H. Schellen, S. 499.

2) Pog. Ann. Bd. 144, S. 454 und Bd. 147, S. 617.

eines bereits ausgeführten (Merz'schen) Fernrohres mit Reversionsobjectiv, das statt eines andern Fernrohres an jedem derartigen Apparat befestigt werden kann.

Zöllner versinnlicht den Eindruck, den die beiden Natronlinien in einem vorzüglichen Münchener Spectroskope machten, als dasselbe mit einem Reversionsoculare versehen wurde, durch eine besondere Zeichnung (Fig. 4). Die Grösse der Zerstreuung und die Klarheit der Bilder war so bedeutend, dass man zwischen den beiden Natronlinien a und b im Sonnenspectrum und zwar beim höchsten Stande der Sonne ausser der Nickellinie n noch deutlich eine feine brechbarere Linie (x) erblickte. Und um eine Vorstellung von der grossen Genauigkeit zu geben, welche die Anwendung des Reversionsprisma bei Positionsbestimmungen von Linien ermöglicht, werden eine Anzahl von Messungen hinzugefügt, die sich auf den Abstand der Natronlinien (a b) und den der beiden andern intermediären Linien beziehen. Wurde nämlich durch Drehung einer Mikrometerschraube das Reversionsprisma verstellt und dadurch der Reihe nach die gezeichneten Linien mit einander zur Coincidenz gebracht, so waren dazu die folgenden Theile des angewandten, ziemlich groben Schraubenganges erforderlich:

Fig. 4.



1. Reihe.				2. Reihe.			
aa_1	bb_1	$bb_1 - aa_1$	$\frac{1}{2}(bb_1 - aa_1)$	aa_1	an_1	ax_1	ab_1
25,7	31,6	5,9	2,95	26,0	27,4	28,0	29,0
25,7	31,7	6,0	3,00	26,0	27,5	28,0	29,1
25,8	31,7	5,9	2,95	26,0	27,6	28,1	29,0
25,9	31,8	5,9	2,95	26,1	27,6	28,1	29,1
25,9	31,8	5,9	2,95	26,1	27,6	28,1	29,1
26,0	31,8	5,8	2,90	26,2	27,5	28,1	29,1
25,9	31,8	5,9	2,95	26,2	27,6	28,2	29,0
25,8	31,9	6,1	3,05	26,2	27,7	28,1	29,1
26,0	31,9	5,9	2,95	26,1	27,5	28,2	29,1
25,9	31,9	6,0	3,00	26,2	27,5	28,1	29,0
			Mittel: 2,965 ± 0,009	26,11	27,55	28,10	29,06

Mittelst des Zöllner'schen Reversionsapparates ist es denn in der That auf der für astrophysische Untersuchungen gegründeten Sternwarte Bothkamp bei Kiel gelungen, die Verschiebung der Linien des Ostrandes der Sonne gegen die des Westrandes „bestimmt und wiederholt" zu sehen. Es geschah das in den Tagen des 9., 10., 11. und 15. Juni 1871 seitens der Astronomen Vogel und Lohse*). Zwar sind die erhaltenen Zahlenwerthe noch wenig zuverlässig, und würde es darum gewagt sein, irgend weitere Schlüsse daraus ziehen zu wollen, aber soviel, sagt Vogel, geht aus allen Beobachtungen hervor, „dass eine Verschiebung der Linien durch die Rotation der Sonne als mit Sicherheit nachgewiesen zu betrachten ist."

*) l. c. S. 452 und Astron. Nachr. Bd. 78, Nr. 1864, S. 248, ferner: „Vogel, Beobachtungen der Sternwarte zu Bothkamp, Leipzig 1872."

Abhandlung II.

(Vergl. Poggendorff's Annalen Bd. CXLIV, S. 287—300.)

Die Aberration der Lichtbrechung.

Verallgemeinerung des Brechungsgesetzes.

Fresnel hat in einem Briefe an Arago[1]) die Hypothese aufgestellt, dass der in einem bewegten durchsichtigen Mittel enthaltene Aether mit den ponderablen Molekülen zum Theil fortgeführt werde, und dass in Folge dessen die Geschwindigkeit des durchgehenden Lichtes einen Zuwachs von der Grösse $\frac{n^2-1}{n^2}g$ erfahre, wenn das Mittel mit der Geschwindigkeit g in der gleichen Richtung bewegt und unter n der Brechungsexponent im Ruhezustand verstanden wird. Ihm gilt bekanntlich das Quadrat von n als Mass für die Dichtigkeit des eingeschlossenen Aethers, folglich n^2-1 als Mass des Ueberschusses dieser Dichtigkeit über die des umgebenden Weltäthers, und so würde die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des inneren Aethers (oder seine mittlere Geschwindigkeit) im Verhältniss von $(n^2-1):n^2$ an der Verschiebungsgeschwindigkeit der ponderablen Moleküle Theil nehmen. Dass in der That die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in Folge der Translation eine der Theorie Fresnel's entsprechende Modification erfährt, ist inzwischen durch die Versuche Fizeau's[2]) mit bewegten Flüssigkeiten experimentell bestätigt worden.

1) Ann. d. chim. t. IX, p. 56, abgedruckt als Anhang II.

2) Ann. d. chim. 3. série t. LVII, p. 385. Vrgl. Zusatz C.

Es ist indess ein Anderes, diese Modification als solche einfach anzuerkennen, ein Anderes, sich auch die Fresnel'sche Vorstellung bezüglich der Art ihres Zustandekommens zu eigen zu machen.

Die besprochene Hypothese benutzt Fresnel zur Erklärung des negativen Resultates des sogenannten Arago'schen Versuches. Arago hatte nämlich durch zahlreiche Beobachtungen an Fixsternen dargethan, dass die Bewegung der Erde auf die Brechung des von ihnen ausgesandten Lichtes keinen wahrnehmbaren Einfluss ausübt.

Neuerdings hat sich Klinkerfues in seinem vorhin citirten Schriftchen*) mit den Fresnel'schen Hypothesen beschäftigt. Klinkerfues lässt die Genauigkeit des Fizeau'schen Versuches dahingestellt, dahingegen behauptet er, dass die Hinzuziehung dieser Hypothesen zur Erklärung des negativen Resultates von Arago überflüssig sei, und dass vielmehr die Berücksichtigung des Einflusses der Bewegung der Scheidewände vollkommen ausreiche.

Wenn ich im Folgenden die Aberration der Lichtbrechung einer genaueren Prüfung unterziehe, so wird sich zugleich die Unhaltbarkeit dieser Anschauung von selbst ergeben. Es genügt zu dem Ende, dass ich den von Fresnel behandelten Specialfall, für den Strahl und brechendes Prisma sich im gleichen Sinn bewegen, in umgekehrter Gedankenfolge entwickle, den zweiten Specialfall, für den Strahl und Prisma sich unter rechtem Winkel bewegen, hinzufüge und endlich die erhaltenen Formeln verallgemeinere.

Was zunächst die Aberration des directen (etwa Fixstern-) Lichtes — Klinkerfues nennt sie die physiologische Aberration — betrifft, so ist dieselbe jene bekannte optische Täuschung, bezüglich deren Entdeckung und Ursache ich einfach auf Zusatz *J* verweise. Dieselbe erreicht ihren Maximalwerth, wenn Strahl und Erde sich unter rechtem Winkel begegnen, und nennt man die bezüglichen Geschwindigkeiten v und g, so ist der Aberrationswinkel:

---

*) Die Aberration der Fixsterne, Leipzig 1867.

$$\alpha_m = \frac{g}{v}.$$

Schliessen dagegen Strahl und Bewegungsrichtung der Erde einen Winkel φ ein, so zerlegt sich g senkrecht und parallel zum Strahle in die beiden Componenten $g \sin \varphi$ und $g \cos \varphi$. Die Letztere addirt sich zur Geschwindigkeit des Lichtes, und so wird die Aberration:

$$\alpha = \frac{g \sin \varphi}{v + g \cos \varphi}.$$

Nun sollen in Zukunft die höheren Potenzen von $\frac{g}{v}$ stets vernachlässigt werden; es kommt daher einfacher:

$$7. \qquad \alpha = \frac{g}{v} \sin \varphi.$$

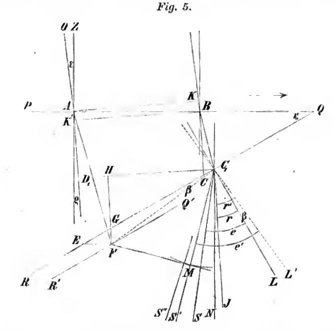
Dies vorausgesetzt, denke man sich einen Stern in das Fadenkreuz eines Fernrohrs gebracht, sodann zwischen Stern und Objectiv ein Prisma eingeschoben und die durch dasselbe bewirkte Ablenkung gemessen. Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, ob diese Ablenkung eine Function der Geschwindigkeit g ist, mit der sich Prisma und Fernrohr in dem als ruhend gedachten Aether des Weltraumes bewegen. Ob der in dem Prisma enthaltene Aether an der Bewegung desselben Theil nimmt, bleibe dahingestellt. Soviel jedoch ist wahrscheinlich, dass für den Fall einer Entrainirung die mittlere Translationsgeschwindigkeit des Prismenäthers einen irgend zwischen 0 und g liegenden Werth besitzt, der gK heisse, unter K eine Grösse verstanden, für die $0 < K < 1$.

Der Einfachheit wegen sei vorläufig das Prisma so aufgestellt, dass die Eintrittsfläche der Strahlen genau senkrecht steht auf der Axe des Fernrohres, wenn dieses auf den Stern gerichtet ist, und dass der Hauptschnitt des Prisma in die Ebene von Strahl und Bewegungsrichtung der Erde hineinfällt*).

*) Das Fixsternlicht lässt sich übrigens durch das terrestrische Licht eines beleuchteten Spaltrohres ersetzen. In der That ist bei der Bewegung eines optischen Theodoliten die Aberration im Spaltrohr genau die umgekehrte wie im Fernrohr. Die Normale der aus dem Spaltrohr austretenden ebenen Welle ist gegen die Axe desselben unter dem Aberrationswinkel geneigt, und das Fadenkreuz des Beobachtungsrohres wird sie — wenn wieder zum reellen Spaltbild vereinigt — nur dann auffangen, wenn seine Axe der des Collimators parallel ist.

I. Die Erde bewege sich senkrecht zur scheinbaren Richtung des Sternes ZA von links nach rechts (Fig. 5). Die

Fig. 5.



Linie PQ des Hauptschnittes des Prisma fällt alsdann mit der Bewegungsrichtung der Erde zusammen. Eine Welle AK, die der Stern aussendet, trifft die Vorderfläche unter dem Winkel $\varepsilon = \alpha_m = \frac{g}{v}$. Sie gelangt in Folge der ersten Brechung in die Lage BK', und der Brechungswinkel ϱ findet sich zu $\varrho = \frac{g}{v \cdot n}$, insofern jede durch die Bewegung etwa eingetretene Modification dieser Brechung nur Grössen zweiter Ordnung hinzubringen würde und wir diese vernachlässigen.

Im Innern des Prisma bewegt sich die Welle $K'B$ senkrecht zu ihrer Normalen BC mit einer Geschwindigkeit, die nur um eine zu vernachlässigende Grösse von der Geschwindigkeit v' des Lichtes im ruhenden Prisma verschieden sein kann. Da die Schwingungen jedoch materiellen Aethertheil-

chen anhaften und diese sich mit einer mittleren Entrainirungsgeschwindigkeit gK von links nach rechts verschieben, so wird auch die Welle an dieser Verschiebung Theil nehmen. Der Endpunkt B der Welle schreitet also nach dem Gesetz einer geraden Linie BC_1 *), der Diagonalen eines Parallelogramms der Geschwindigkeiten gK und v', fort und wird daher nicht in einem Punkte C, sondern in einem mehr rechts liegenden Punkte C_1 des Raumes die Hinterfläche des Prisma erreichen. In diesem Augenblick hat die Projection der Welle die Lage $C_1 D_1$.

Der Punkt C_1 wird dem Huyghens'schen Princip zufolge Erschütterungsmittelpunkt einer secundären Kugelwelle, die sich mit der Geschwindigkeit v im freien Aether ausbreitet. Trifft endlich der letzte Punkt D_1 der Welle bei der Scheidewand ein, so mag diese in die mehr vorgerückte Lage $R' Q'$ gelangt sein. Der Austritt des Punktes D_1 geschieht dann in einem Punkte F des Raumes. — Während der Zeit aber, in der das Licht im Prisma die Strecke $D_1 F$ zurücklegt, hat die um C_1 entstandene Elementarwelle bereits einen Radius $C_1 M$ gewonnen, für den $C_1 M : FH = v : v'$. Man erhält daher die austretende Welle, wenn man von F aus eine Tangente zieht an den Kreis $C_1 M$, also so verfährt, als ob nicht $C_1 E$, sondern $C_1 F$ die Projection der wirklichen Scheidewand wäre.

Was zunächst den Winkel β betrifft, um den die zweite brechende Fläche scheinbar gedreht ist, so hat man im Dreieck GFC_1:

$$GF : GC_1 = \sin\beta : \sin(\varrho + 90 - r_0 - \beta).$$

Zieht man das Einfallsloth LC_1 und zur Richtung der Normalen BC die Parallele JC_1, so heisse der innere Brechungswinkel JC_1L r; man hat dann $r_0 = r + \varrho$. Nahezu schreibt sich also:

$$\sin\beta = \frac{GF}{GC_1}\cos r.$$

*) Ueber die allgemeinere Bedeutung des Winkels CBC_1 vergleiche die folgende Abhandlung.

Nun ist: $G C_1 = \frac{G H}{\sin r}$, und unter fernerer Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung: $G F = E F \operatorname{tang} r$,

$$\sin \beta = \frac{E F}{H F} \operatorname{tang} r \sin r \cos r$$

oder auch:

$$\beta = \frac{g}{v'} \sin^2 r.$$

Es sei ferner $C_1 S$ die Lage des austretenden Strahles für das ruhende Prisma, und der Winkel zwischen $C_1 S$ und $C_1 S'$ heisse $\varDelta e$. Zur Berechnung desselben werde das der fictiven Trennungsfläche entsprechende Einfallsloth $L' C_1$ gezogen. Man hat dann:

$$L' C_1 J = r', \quad L C_1 J = r, \quad L C_1 L' = r' - r = \beta.$$

Setzt man noch:

$$S' C_1 L' = e', \; S C_1 L = e,$$

dann wird:

$$\varDelta e = e' - e - \beta = (e' - r') - (e - r).$$

Andererseits ist:

$$\sin e = n \sin r, \quad \sin e' = n \sin (r + \beta),$$

$$\sin e' - \sin e = \frac{g}{v} \sin e \sin r \cos r,$$

folglich:

$$\delta e = e' - e = \frac{g}{v'} \operatorname{tang} e \sin r \cos r.$$

Endlich ergibt sich für $\varDelta e$, wenn noch $\frac{n}{v}$ statt $\frac{1}{v'}$ geschrieben wird:

$$\varDelta e = \frac{g}{v} \operatorname{tang} e \sin (e - r).$$

Die Ablenkung, welche der austretende Strahl $S' C_1$ in Folge der zweiten Brechung gegen die Richtung $J C_1$ der inneren Wellennormale erlitten hat, ist offenbar $= e' - r'$, so dass kommt:

$$S' C_1 J = e - r + \varDelta e.$$

Und da die innere Wellennormale $J C_1$ um ϱ gegen die Normale $N C_1'$ zur Eintrittsfläche des Prisma gedreht ist, so ergibt sich die Ablenkung gegen diese zu:

$$S' C_1 N = e - r + \varDelta e - \varrho.$$

Längs der so bestimmten festen Richtung $S'C_1$ also schreitet die gebrochene Welle im Weltraum fort. Wird dieselbe mit einem Fernrohr aufgefangen, so erzeugt sie, der Gl. 7 entsprechend, eine physiologische Aberration von der Grösse $+\frac{g}{v}\cos(e'-r')$, d. h. man hat das Fernrohr um den gedachten Winkel im Sinne der Bewegung des Prisma vorzurücken, etwa in die Lage $S''C_1$ hineinzubringen.

Die gesammte scheinbare prismatische Ablenkung beträgt also angenähert:

$$S'C_1N = e - r + \Delta e - \varrho + \frac{g}{v}\cos(e-r).$$

$$= e - r + \frac{g}{v}\left(\frac{\cos r}{\cos e} - \frac{1}{n}\right).$$

Fragt man jetzt nach derjenigen Ablenkung, die man beobachten würde, wenn Prisma und Fernrohr ruhten, so ist zu beachten, dass man beim anfänglichen Aufstellen des Prisma keinen Aberrationsfehler gemacht haben würde. Für diesen Fall wäre $\varepsilon = \varrho = 0$, $r = r_0$ und die Ablenkung $= e_0 - r_0$, unter e_0 den dem Brechungswinkel r_0 entsprechenden Austrittswinkel verstanden.

Andererseits besteht zwischen den früheren Winkeln r, ϱ und r_0 die Beziehung:

$$r_0 = r + \varrho.$$

Man hat daher:

$$\sin e_0 - \sin e = \frac{g}{v}\cos r,$$

$$e_0 - e = \frac{g}{v}\,\frac{\cos r}{\cos e}.$$

So kommt:

$$e_0 - r_0 = e - r + \frac{g}{v}\left(\frac{\cos r}{\cos e} - \frac{1}{n}\right)$$

und demgemäss:

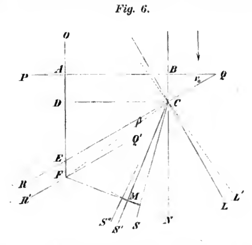
$$S''C_1N = e_0 - r_0.$$

Ob also Prisma und Fernrohr sich bewegen, oder ob sie in Ruhe sind, in beiden Fällen ist die prismatische Ablenkung genau gleich. Dem Arago'schen Resultate ist also in diesem ersten Hauptfalle genügt, ohne dass der Coefficient K und damit die Translationsgeschwindigkeit

des etwa entrainirten Aethers in die Rechnung eingegangen wäre [1]).

II. Die Erde bewege sich in der Richtung des Sternes und entferne sich von ihm (Fig. 6). Die Linie PQ eines

Fig. 6.



Hauptschnittes des Prisma steht dann senkrecht auf der Richtung der einfallenden Strahlen, und es wird beim Einstellen der Apparate kein Aberrationsfehler gemacht. Die einfallende Welle AB tritt ohne Brechung in das Prisma und erreicht in einem bestimmten Augenblick die Lage DC. In diesem Augenblick beginnt um C — unabhängig von der Bewegung des Prisma — im umgebenden Weltäther die Bildung einer elementaren Kugelwelle. Der Punkt D der Welle, der aus dem ruhenden Prisma schon bei E austräte, durchläuft noch die Strecke EF im Glase und gelangt erst in F zum Austritt. Auch jetzt also tritt an die Stelle der wirklichen Scheidewand EC die fictive FC.

Andererseits erfährt möglicher Weise die Geschwindigkeit des Lichtes v' im ruhenden Prisma irgend welchen Zuwachs [2]),

1) Dieser Fall ist mit mehr Umständlichkeit von **van der Willigen** behandelt in den Archives du Musée Teyler, t. I, p. 375.

2) Wäre das bewegte Mittel homogen-isotrop, d. h. aus völlig gleichen Molekülen zusammengesetzt, so wäre jetzt ein Unterschied zu

der hinfort, abgesehen von der Ursache seiner Entstehung, durch gk bezeichnet werde. Die in das Glas eingetretene Welle durchläuft also mit der Totalgeschwindigkeit:

$$v'_1 = v'\left(1 + \frac{g}{v'}k\right)$$

den absoluten Raum, d. h. hier die Strecke von A bis F.

Dies vorausgesetzt, berechnet sich der Winkel β, um den die Trennungsfläche CE anscheinend gedreht ist, gerade wie vorhin; man erhält:

$$\sin\beta = \frac{EF}{DE}\sin r_0 \cos r_0,$$

oder unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{g}{v}$:

$$\beta = \frac{g}{v'}\sin r_0 \cos r_0.$$

Zur Berechnung der Differenz Δe der Austrittswinkel dient gleichfalls die frühere Gleichung:

$$\Delta e = e' - e_0 - \beta = (e' - r') - (e_0 - r_0),.$$

aber es ordnet sich dem Brechungsindex n des ruhenden Prisma nunmehr ein durch die Bewegung desselben modificirter zu, den ich ν nennen will, so dass:

$$\nu = \frac{v}{v'_1} = \frac{n}{1 + \frac{g}{v'}k}.$$

Man hat also:

$$\sin e_0 = n \sin r_0,$$
$$\sin e' = \nu \sin r' = \nu \sin(r_0 + \beta).$$

Diese Gleichungen ziehen sich unter Beachtung der zulässigen Vernachlässigungen in die folgende zusammen:

machen zwischen der absoluten Geschwindigkeit der Lichtverbreitung und zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Theilchen zu Theilchen. Beide sind im ruhenden Prisma einander gleich, nämlich $= v'$; für den Zustand der Bewegung möge die erstere durch v'_1 und die letztere durch v_1 bezeichnet werden. Nennen wir ferner, wie oben, den Zuwachs der absoluten Ausbreitungsgeschwindigkeit gk und den der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der inneren Wellen gk', so kommt:

$$v_1 = v' + gk'$$
$$v'_1 = v' + gk = v_1 + gK = v' + g(k' + K),$$

so dass sich für den Entrainirungscoefficienten der Werth $K = k - k'$ ergibt.



$$\sin e' - \sin e_0 = \frac{g}{v'} (\cos^2 r_0 - k) \sin e_0,$$

woraus:

$$e' - e_0 = \frac{g}{v'} \operatorname{tang} e_0 (\cos^2 r_0 - k)$$

und:

$$\varDelta e = \frac{g}{v'} \left[\operatorname{tang} e_0 (\cos^2 r_0 - k) - \sin r_0 \cos r_0 \right].$$

Nun ist die prismatische Ablenkung $= S'CN = e' - r'$. Und da das Beobachtungsfernrohr wegen der auftretenden Aberration im Sinne der Bewegung um einen kleinen Winkel $S''CS' = \alpha$ gedreht werden muss, so beträgt die scheinbare Ablenkung:

$$S''CN = e' - r' + \alpha$$

$$= e_0 - r_0 + \varDelta e + \frac{g}{v} \sin (e_0 - r_0).$$

Dieser Ausdruck geht nach leichter Reduction über in den definitiven folgenden:

$$S''C\dot{N} = e_0 - r_0 + \frac{g}{v} n \operatorname{tang} e_0 \left(\cos^2 r_0 - k - \frac{\cos^2 e_0}{n^2} \right).$$

Nun verlangt das Arago'sche Experiment, dass diese Ablenkung den gleichen Werth hat, wie auch immer die Bewegung der Erde gerichtet sei. Sie muss daher gleich sein der für den ersten Specialfall gefundenen, nämlich $= e_0 - r_0$, und so folgt als Bedingungsgleichung:

$$\cos^2 r_0 - \frac{\cos^2 e_0}{n^2} = k.$$

Oder:

$$1 - \frac{\sin^2 e_0}{n^2} - \frac{1 - \sin^2 e_0}{n^2} = k$$

d. h.

$$\frac{n^2 - 1}{n^2} = k.$$

Nur unter der Bedingung also, dass:

$$8_a. \qquad v'_1 = v' + g \frac{n^2 - 1}{n^2},\text{*)}$$

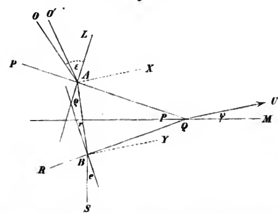
dass also die Modification der absoluten Lichtgeschwindigkeit, die hier einzig in Betracht kommt,

*) Für ein dispergirendes Mittel möge die etwaige Aenderung der Dispersion vorläufig vernachlässigt werden. Vrgl. darüber Zusatz D.

$= g \frac{n^2 - 1}{n^2}$ gesetzt wird, gibt der zweite Specialfall ein mit der Erfahrung übereinstimmendes Resultat.

III. Behandeln wir jetzt den allgemeinsten Fall. Die Bewegungsrichtung der Erde bilde mit der scheinbaren Richtung des Sternes einen beliebigen Winkel, und zugleich mögen die Strahlen desselben die Vorderfläche unter einem beliebigen Einfallswinkel treffen. Die scheinbare Richtung des Sternes sei $O'A$ (Fig. 7.) Der scheinbare Einfallswinkel heisse ε_0,

Fig. 7.



der brechende Winkel $2p$, und die Bewegungsrichtung der Erde QU bilde mit der Mittellinie des Prisma QM den Winkel $UQM = \psi$.

Die von der Aberration herrührenden Richtungsänderungen sind wiederum dreifach; sie lassen sich am kürzesten in folgender Weise berechnen.

1) Da die scheinbare Richtung $O'A$ gegen die zu QU gezogene Parallele AX um den Winkel $O'AX = 90 + \varepsilon_0 - \psi - p$ geneigt ist, so hat der bei der Aufstellung gemachte Aberrationsfehler den Werth:

$$\alpha_1 = \frac{g}{v} \cos(\varepsilon_0 - \psi - p).$$

Um diesen Betrag also ist der scheinbare Einfallswinkel zu vergrössern, um den wirklichen (ε) zu erhalten. Es ist so:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha_1.$$

Nennt man wieder den zu ε gehörigen Brechungswinkel ϱ und die entsprechenden Winkel für die zweite Brechung e, resp. r, so ergeben sich mit Beachtung der zulässigen Vernachlässigungen folgende Entwicklungen:

$$\sin \varepsilon_0 = n \sin \varrho_0, \quad \cos \varepsilon_0 \, \delta \varepsilon = n \cos \varrho_0 \, \delta \varrho$$
$$r + \varrho = 2p, \quad \delta r = -\delta \varrho$$
$$\sin e_0 = n \sin r_0, \quad \cos e_0 \, \delta e = n \cos r_0 \, \delta r.$$

Und so folgt, wenn $\delta \varepsilon = \alpha_1$ gesetzt wird:

$$\delta e = -\frac{g}{v} \frac{\cos r \cos \varepsilon}{\cos e \cos \varrho} \cos (\varepsilon - \psi - p).$$

Die physiologische Aberration der Aufstellung bewirkt also hinsichtlich des schliesslichen Austrittswinkels das Increment δe, dasselbe, welches für den ersten Specialfall als $e - e_0$ bezeichnet ist.

2) Die durch die Bewegung modificirte Brechung entwickelt sich leicht und elegant, wenn das Brechungsgesetz selber dahin verallgemeinert wird, dass es ausser auf ruhende auch auf bewegte Mittel Anwendung findet.

Schreibt man:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = \frac{v}{v'} = n,$$

so hat man unter v, resp. v' die relativen Geschwindigkeiten zu verstehen, mit der die Welle im einen Mittel sich einem Punkte der Scheidewand nähert, bezüglich im zweiten sich von ihm entfernt. Die Kenntniss dieser beiden relativen Geschwindigkeiten (relativ in Bezug auf die Punkte der Scheidewand) genügt zur Ausführung der Huyghens'schen Construction, denn offenbar wird die Richtung der gebrochenen Welle zur einfallenden dadurch nicht geändert, dass man das System der beiden Mittel sammt ihrer Scheidewand mit einer beliebig gerichteten Geschwindigkeit g im Raume herumführt.

Nun ist die absolute Geschwindigkeit, mit der sich das Licht im Aether in der Richtung OA dem Punkte A nähert, $= v$. Die Scheidewand bewegt sich in dieser nämlichen Richtung mit einer absoluten Geschwindigkeit $= g \cos OAX$. Die relative Geschwindigkeit des Strahles OA beträgt also:

$$v + g \cos OAX.$$

Andererseits bewegt sich das Licht im Glase des Prisma und zwar in der bestimmten Richtung AB mit einer absoluten Geschwindigkeit $= v' + gk \cos BAX$, die der Scheidewand in der gleichen Richtung beträgt $g \cos BAX$, und daher ist die relative Geschwindigkeit der eintretenden Welle:

$$v' - g(1-k) \cos BAX.$$

Offenbar nun lässt sich die Huyghens'sche Construction dieser Welle und zwar in einfachster Form mittelst der Beziehung:

$$9. \quad \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varrho + \varDelta\varrho)} = \frac{v - g \sin(\varepsilon - \psi - p)}{v' - g(1-k)\sin(\varrho + \varDelta\varrho - \psi - p)}$$

ausführen, sobald nur auf der rechten Seite Winkel $\varrho + \varDelta\varrho$ näherungsweise bekannt ist.

Die Gleichung formt sich unter Anwendung der zulässigen Vernachlässigungen um in folgende:

$$\sin(\varrho + \varDelta\varrho) = \frac{\sin\varepsilon}{n}\left[1 + \frac{g}{v}\sin(\varepsilon - \psi - p) - \frac{g}{v'}(1-k)\sin(\varrho - \psi - p)\right],$$

und daraus folgt weiter:

$$\varDelta\varrho = \frac{g}{v}[\sin(\varepsilon - \psi - p) - n(1-k)\sin(\varrho - \psi - p)] \operatorname{tang} \varrho.$$

Setzt man, um zur zweiten Brechung zu gelangen,

$$r + \varrho = 2p, \quad \varDelta r = -\varDelta\varrho,$$

so gilt für diese das modificirte Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin(e + \varDelta e)}{\sin(r + \varDelta r)} = \frac{v - g \cos SBY}{v' + g(1-k)\cos ABY}.$$

Man leitet daraus ab:

$$\varDelta e = n\frac{\cos r}{\cos e}\varDelta r - \frac{g}{v}[\cos SBY + n(1-k)\cos ABY] \operatorname{tang} e.$$

Und wenn für die Winkel ihre Werthe eingesetzt werden:

$$\varDelta e = -\frac{g}{v}\operatorname{tang} e\Big\{[\sin(\varepsilon - \psi - p) - n(1-k)\sin(\varrho - \psi - p)]\frac{\operatorname{tang}\varrho}{\operatorname{tang} r} - [\sin(e + \psi - p) - n(1-k)\sin(r + \psi - p)]\Big\}.$$

Diese Variation $\varDelta e$ ist also die Folge einer physischen Aberration des gebrochenen Lichtes.

3) Wird endlich der aus dem Prisma austretende Strahl mittels eines Fernrohrs beobachtet, so tritt zu den beiden be-

sprochenen Abweichungen nochmals die physiologische Aberration hinzu. Dieselbe hat den Werth:

$$a_2 = + \frac{g}{v} \cos(e + \psi - p).$$

Die Gesammtsumme der durch die Bewegung hervorgerufenen Variationeu ist sonach:

$$\delta e + \varDelta e + a_2,$$

und da dieselbe dem Arago'schen Versuche zufolge $= o$ sein muss, so erhält man als Bedingungsgleichung nach mehrfachen Reductionen deu folgenden Ausdruck:

$$\cos(\psi - p) \cos \varrho - \cos(\psi + p) \cos r = n^2 (1 - k) \times \sin(\psi + p - \varrho) \sin 2p.$$

Derselbe vereinfacht sich weiter auf:

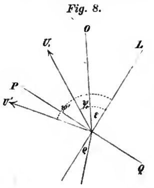
$$n^2 (1 - k) = 1 \quad \text{oder:} \quad k = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

Vorstehende Gleichung umfasst zugleich die Specialfälle I und II, und so ist denn allgemein bewiesen, dass die absolute Geschwindigkeit des Lichtes in einem mit der Translationsgeschwindigkeit g bewegten ponderablen Mittel nach einer Richtung, die mit der Richtung der Bewegung den Winkel φ einschliesst, gegeben ist durch die Relation:

$$8. \qquad v'_1 = v' + g \frac{n^2 - 1}{n^2} \cos \varphi.$$

Verweilen wir noch eineu Augenblick bei Gleichung 9. Mau darf dieselbe betrachten als Ausdruck des durch die Bewegung modificirten Snellius-Huyghens'schen Brechungsgesetzes.

Fig. 8.



Sie lässt sich verallgemeinern, nämlich auf den ideellen Fall ausdehnen, dass Glasmasse und Scheidewand mit den Geschwindigkeiten g', g_1 nach den Richtungen $U'A$, U_1A im Weltäther bewegt werden. Man erhält dann (Fig. 8):

$$10. \quad \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = \frac{v + g_1 \cos(\psi_1 - \varepsilon)}{v' + g_1 \cos(\psi_1 - \varrho) - g' k \cos(\psi' - \varrho)}.$$

Zerlegt man die rechte Seite dieser Gleichung in Factoren und schreibt:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = \frac{v}{v'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{g'}{v'} k \cos(\psi' - \varrho)} \cdot \frac{1 + \frac{g_1}{v} \cos(\psi_1 - \varepsilon)}{1 + \frac{g_1}{v'} \cos(\psi_1 - \varrho)},$$

so ersieht man, dass das modificirte Brechungsgesetz, entsprechend diesen Factoren, die drei folgenden Einzelfälle umfasst:

a) Für $g' = g_1 = 0$, also bei allseitiger Ruhe, ist:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = \frac{v}{v'} = n.$$

b) Für $g_1 = 0$, d. h. bei ausschliesslicher Bewegung der Materie des Glases, wird:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = \frac{v}{v' - g' k \cos(\psi' - \varrho)}.$$

c) Und für $g' = 0$ endlich, d. h. bei blosser Verrückung der Scheidewand, erhält man:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = \frac{v + g_1 \cos(\psi_1 - \varepsilon)}{v' + g_1 \cos(\psi_1 - \varrho)}.$$

Diese letztere Form tritt auch dann ein, wenn $\psi' - \varrho = 90^0$, d. h. wenn Lichtstrahl und Bewegung der Glasmasse auf einander senkrecht stehen, wie solches beim ersten Hauptfall Statt hatte.

Nach Klinkerfues ist die Form c) die generelle; er betrachtet eben die Fresnel'schen Hypothesen als für die Erklärung des Arago'schen Versuches überflüssig und glaubt mit der abstracten Verschiebung der Scheidewand anszukommen. Wären seine Entwickelungen richtig, so hätten wir im Verfolg unserer Untersuchung für k entweder den Werth o finden, oder es hätte dasselbe aus den Rechnungen herausfallen müssen.

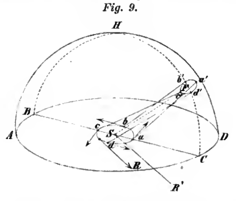
Nichtsdestoweniger bleibt es anzuerkennen, dass Klinkerfues auf die Bedeutung der relativen Geschwindigkeiten als solcher zuerst verwiesen hat.

ZUSATZ B.

Die Aberrationsbahn der Gestirne.

Es soll hier im Anschluss an Gleichung 7 zunächst die Aberrationsbahn der Fixsterne unter der Voraussetzung berechnet werden, dass die Bahn der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne, die bekanntlich eine wenig gestreckte Ellipse ist, genau kreisförmig sei und von der Erde mit der ganz constanten Geschwindigkeit g durchlaufen werde.

Fig. 9.



Dies angenommen, sei (Fig. 9) S die Sonne, der um S beschriebene Kreis $a\,b\,c\,d$ die Ekliptik und F ein Fixstern, der sich in der Ebene $F\,S\,a$ um den Elevationswinkel φ über die Ekliptik erhebt. Die Erde befinde sich in T mit der augenblicklichen Bewegungsrichtung von T nach R.

Die entsprechende Aberration hat dann offenbar den Werth:

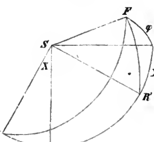
$$u = \frac{g}{v} \sin R\,T\,F$$

und liegt in der Ebne $R\,T\,F$. Sofern man nun noch von der Parallaxe des Sternes absehn, denselben also unmittelbar an

die Himmelskugel $ABCDH$ versetzen darf, so ist TF parallel SF, und wenn zu TR die durch S gehende Parallele $R'S$ gezogen wird, Winkel $RTF = R'SF$, folglich:

$$a = \frac{g}{v} \sin R'F.$$

Fig. 10.



Ist endlich E (Fig. 10) der Punkt, in dem der Durchmesser Sa der Erdbahn die Himmelskugel trifft, so ergibt sich aus dem bei E rechtwinkligen sphärischen Dreieck FER':

$$\sin R'FE = \frac{\sin ER'}{\sin R'F},$$

und wenn man $R'FE$ durch ω und Seite ER' durch χ bezeichnet und den hieraus gezogenen Werth von $R'F$ in vorige Gleichung einsetzt:

(a) $$a = \frac{g}{v} \frac{\sin \chi}{\sin \omega}.$$

Weiterhin folgt aus dem nämlichen Dreieck:

$$\operatorname{tang} R'FE = \frac{\operatorname{tang} R'E}{\sin FE} \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{tang} \chi}{\sin \varphi}.$$

Daraus leitet sich ab:

$$\sin^2 \omega = \frac{\operatorname{tang}^2 \chi}{\sin^2 \varphi + \operatorname{tang}^2 \chi}$$

und folglich:

(b) $$a = \frac{g}{v} \sqrt{\sin^2 \chi + \cos^2 \chi \sin^2 \varphi}.$$

Kennt man also ausser dem Elevationswinkel φ den angulären Abstand der Erde vom Scheitelpunkt a, nämlich $90^0 + \chi$, so ist die Aberration für den betreffenden Augenblick völlig bestimmt.

Um andererseits die Aberrationsbahn selber kennen zu lernen, betrachte man a als radius vector derselben und ω als zugehörigen Polarwinkel. Man erhält alsdann mittelst der obigen zwischen φ, χ und ω bestehenden Beziehung:

$$\cos^2 \chi = \frac{1}{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tang}^2 \omega}, \quad \sin^2 \chi = \frac{\sin^2 \varphi \operatorname{tang}^2 \omega}{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tang}^2 \omega},$$

und wenn der letztere Ausdruck in (a) substituirt wird:

$$\text{(c)} \qquad a = \frac{g}{v} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\omega + \sin^2\omega \sin^2\varphi}}.$$

Dies ist die Polargleichung der Aberrationscurve. Schreibt man sie:

$$a^2 (\cos^2\omega + \sin^2\omega \sin^2\varphi) = \frac{g^2}{v^2} \sin^2\varphi$$

und setzt:

$$a \sin\omega = x$$
$$a \cos\omega = y,$$

so nimmt sie die Form an:

$$\text{(d)} \qquad \frac{y^2}{\frac{g^2}{v^2}\sin^2\varphi} + \frac{x^2}{\frac{g^2}{v^2}} = 1.$$

Die Aberrationsbahn ist also eine Ellipse, deren horizontale Halbaxe $= \frac{g}{v}$, und deren andere $= \frac{g}{v} \sin\varphi$ ist.

Aus den Gleichungen (a) und (d) leitet man noch ab:

$$\text{(e)} \qquad x = \frac{g}{v} \sin\chi, \quad y = \frac{g}{v} \cos\chi \sin\varphi.$$

Bezüglich des numerischen Werthes der grossen Halbaxe der Bahnellipse, also der sogenannten Aberrationsconstante, entnehme ich einer Zusammenstellung von Klinkerfues*) die nachfolgenden Angaben einiger sehr zuverlässiger Beobachter. Den einzelnen Bestimmungen ist der wahrscheinliche Fehler beigefügt.

Aberration nach v. Lindenau	20,"4486.	W. F. = ±	0,"0318
» Struve	20,4451		0,0111
» Peters	20,4255		0,0175
» Lundahl	20,5508		0,0433
Richardson (Troughton's Circle)	20,505		0,043
» (Jones's Circle)	20,502		0,049

Man erhält daraus mit Rücksicht auf die wahrscheinlichen Fehler die Constante der Aberration:

$a_m = 20,''4489$ mit dem wahrsch. Fehler $\pm 0,''0122$

oder auch:

$$\frac{g}{v} = \frac{1}{10087}.$$

*) Aberration der Fixsterne S. 48.

Mittelst dieses Quotienten lässt sich g und damit der Durchmesser der Erdbahn und die Parallaxe der Sonne aus der als bekannt vorausgesetzten Lichtgeschwindigkeit v*) berechnen.

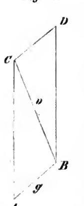
Wie die Aberration sich in Declination und Rectascension eines Gestirnes ausdrückt, und wie sich dieselbe bei Berücksichtigung der elliptischen Form der Erdbahn und der ungleichförmigen Geschwindigkeit der Erde modificiren würde, darüber vergleiche man die Lehrbücher der Astronomie.

Wie den Fixsternen, so kommt natürlich auch der Sonne und den Planeten eine Aberration zu. Wir sehen die Sonne nie an ihrem wahren Orte, sondern — abgesehen von der atmosphärischen Strahlenbrechung — das ganze Jahr hindurch um den nahezu constanten Werth von 20,″45 vorgerückt. Man überzeugt sich leicht mittelst einer einfachen Figur, dass dieser Betrag der gleiche bleibt, mag nun die Sonne absolut im Weltraum ruhen oder mag sie sich mit der Erde beliebig bewegen, dass also mit andern Worten nur die senkrecht zur Verbindungslinie beider genommene relative Geschwindigkeit derselben in Betracht kommt.

Was ferner die Aberration der Planeten betrifft, so bestimmt sich dieselbe für irgend einen Augenblick durchaus nach dem gleichen Gesetze wie die der Fixsterne. Man hat aber zu beachten, dass von dem Moment der Emanation einer Welle bis zu ihrem Eintreffen in's Fernrohr eine gewisse endliche Zeit vergeht, während welcher der Planet einen mehr oder minder beträchtlichen Bogen zurücklegt. Es bezieht sich also der mit Berücksichtigung der Aberration bestimmte Ort desselben nicht auf die Zeit der Beobachtung t, sondern auf die Zeit $\left(t - \frac{D}{v}\right)$, unter D den damaligen Abstand verstanden.

*) Nach den neuesten, mit vervollkommneten Hülfsmitteln und unter den strengsten Vorsichtsmassregeln angestellten Messungen von Foucault (Methode des rotirenden Spiegels. Pog. Ann. Bd. 118 [1863]) und von Cornu (Fizeau's Methode des gezahnten Rades. Compt. rend. Nr. 6, 1873) stellt sich dieselbe übereinstimmend zu 298000, resp. 298500 Kilometern. — Rücksichtlich der Sonnenparallaxe vergleiche man einen Aufsatz Babinet's in den Compt. rend. T. LV od. Pogg. Ann. Bd. 118, S. 487.

Fig. 11.



Denken wir uns schliesslich einen Planeten C (Fig. 11) mit der Erde A in fester Verbindung. Bewegt sich die letztere während der Zeit $\frac{CB}{v}$ bis B, so dass $AB = g\frac{CB}{v}$, so wird man das in A aufgestellte und mittlerweile nach B gelangte Fernrohr unter einem Aberrationswinkel $\alpha = \frac{g}{v}\sin CBA$ oder nahezu $= CBD$ gegen die Richtung des einfallenden Strahles CB nach vorn zu neigen, also in die Lage DB zu bringen haben, um das Bild des leuchtenden Punktes mit dem Fadenkreuz in Coincidenz zu sehen. Während sich dieses von A nach B verschiebt, bewegt sich jener um die gleich grosse Strecke CD nach D, er befindet sich also in jedem Augenblick auf der Verlängerung der optischen Axe des Fernrohrs. Die Aberration fest mit der Erde verbundener, d. h. terrestrischer Lichtquellen ist folglich scheinbar gleich Null. — Dieses nämliche Resultat wurde auf etwas anderem Wege bereits S. 37 in der Anmerkung entwickelt.

Abhandlung III.

(Vergl. Poggendorff's Annalen Bd. CXLIV, S. 363—375.)

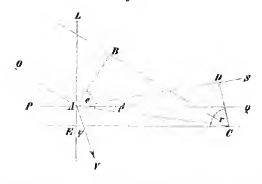
Zur Theorie der einfach brechenden Mittel mit extraordinärem Strahle.

Habe ich in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt, dass die Erklärung des Arago'schen Versuches, demzufolge die scheinbare Ablenkung der durch ein Prisma gebrochenen Strahlen von der Bewegung desselben unabhängig ist, mit Nothwendigkeit auf die Fresnel'sche Constante k hinführt, so gilt das Gleiche bezüglich des verwickelteren Vorganges, bei dem der Durchgang des Lichtes durch ein ponderables Medium im Innern desselben zugleich mit Spiegelung verbunden ist, oder auch dann, wenn es sich um die Bestimmung der Richtung handelt, in der ein durch eine planparallele Platte betrachteter leuchtender Punkt dem Auge erscheint, oder endlich bei jeder Art von Interferenzversuchen, sofern man nur die Verschiebungen der Interferenzstreifen auf ihre Breite als Einheit bezieht.

Die hier angedeuteten Punkte mögen jetzt der Reihe nach besprochen werden.

Ich wende mich zunächst zur Begründung der Fresnel'schen Hypothese durch Spiegelversuche. Sei, um die Theorie der Spiegelung in allgemeinster Weise zu behandeln, PQ

Fig. 12.



(Fig. 12) die Projection eines ebenen Spiegels, der sich im Innern eines ponderablen Mittels befindet. Auf denselben falle aus der Richtung OA eine ebne Welle AB unter dem Einfallswinkel e auf und treffe den Spiegel in einem bestimmten Zeitmoment im Punkte A. Der Spiegel bewege sich mit der Geschwindigkeit g in der Richtung AV, die mit dem verlängerten Einfallsloth den Winkel $L'AV = \psi$ mache.

In dem Augenblick, wo Punkt B der Welle den Spiegel erreicht, habe dieser die Lage EC, und die inzwischen von A ausgegangene Erschütterung habe sich mit der absoluten Geschwindigkeit:

11. $$v'_1 = v' + g\,k \cos\varphi$$

im Raume des bewegten Mittels um A herum verbreitet, unter φ den Winkel verstanden, den der Radius vector v'_1 der durch vorstehende Gleichung repräsentirten Geschwindigkeitsfläche mit ihrer Rotationsaxe AV bildet. Es sei AD ein Radius vector dieser Fläche, wie sie für den betreffenden Moment construirt ist; er habe zudem die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie der Punkte C und D auf ihm senkrecht steht. Es ist dann dem Huyghens'schen Princip zufolge DC die Projection der gespiegelten Welle und AS die Normale derselben.

Die Richtung dieser Normalen bestimmt sich folgendermassen. Heisst der Spiegelungswinkel r und der Winkel QAC, um den der Spiegel sich scheinbar gedreht hat, β, so ist:

$$A D = A C \, . \sin (r - \beta)$$
$$B C = A C \, . \sin (e + \beta),$$

und da zudem:

$$\frac{A D}{B C} = \frac{v' - g k \cos (r + \psi)}{v' + g k \cos (e - \psi)},$$

so folgt:

$$\sin (r - \beta) = \sin (e + \beta) \left[1 - \frac{g k}{v'} \Big(\cos (r + \psi) + \cos (e - \psi) \Big) \right]$$

und mit Rücksicht auf die zulässigen Vernachlässigungen, wenn zugleich

$$r = e + \varDelta r, \; \beta = \frac{A E}{A C} = \frac{g}{v'} \sin e \cos \psi$$

gesetzt wird:

$$\text{12.} \qquad \varDelta r = 2 \frac{g}{v'} (1 - k) \sin e \cos \psi .$$

Man sieht, dass, wie von vornherein klar, nur die nach der Richtung des Lothes wirkende Bewegungscomponente in Betracht kommt, und dass die Drehung der gespiegelten Wellennormale sich mit der Natur des Mittels ändert.

Directer und ohne Zuhülfenahme geometrischer Betrachtungen erhält man diesen Drehungswinkel, wenn man das im vorigen Aufsatz besprochene Princip der relativen Geschwindigkeiten zur Erweiterung des Spiegelgesetzes selbst verwendet. Dasselbe würde die Form erhalten:

$$\text{13.} \qquad \frac{\sin e}{\sin r} = \frac{v' - g (1 - k) \cos (e - \psi)}{v' + g (1 - k) \cos (r + \psi)} .$$

Und zählt man den Spiegelungswinkel, anstatt im negativen, im positiven Sinn vom Lothe ab, so bildet das Reflexions-Gesetz nur eine specielle Form von dem der Brechung.

Da die Geschwindigkeitsfläche der bewegten Mittel von der Kugelgestalt abweicht, so hat man zwischen Strahl und Wellennormale zu unterscheiden.

Die Huyghens'sche Construction des Strahles erfordert die Kenntniss der Wellenfläche. Man erhält dieselbe als Enveloppe der durch Gleichung 11 repräsentirten Geschwindigkeitsfläche mittelst der bekannten Gleichungen:

$$v'_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi = v' + g k \cos \varphi$$
$$x \cos (\varphi + d \varphi) + y \sin (\varphi + d \varphi) = v' + g k \cos (\varphi + d \varphi)$$

und Elimination des Winkels φ. So kommt zunächst:

14. $y = v' \sin\varphi, \quad x = v' \cos\varphi + gk$

und daraus als Gleichung der Wellenfläche in rechtwinkligen und Polar-Coordinaten:

$$y^2 + (x - gk)^2 = v'^2.$$

15. $$r = v' \sqrt{1 - \frac{g^2}{v'^2} k^2 \sin^2\gamma} + gk\cos\gamma.$$

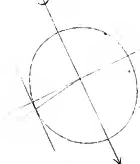


Fig. 13.

Die Wellenfläche (Fig. 13) fällt also innerhalb der bisher von uns festgehaltenen Genauigkeitsgränze mit der Geschwindigkeitsfläche zusammen. Daraus folgt indess keineswegs, dass auch der Winkel zwischen Strahl und Wellennormale eine kleine Grösse höherer Ordnung ist.

Nennen wir die Coordinaten zweier einander zugeordneter Punkte der Geschwindigkeits- und Wellenfläche η, ξ, resp. y, x und, wie oben, den Winkel zwischen y, x und der Rotationsaxe γ, dann ist:

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tang}\varphi, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\gamma = \frac{v'\sin\varphi}{v'\cos\varphi + gk},$$

und nach einigen Reductionen kommt:

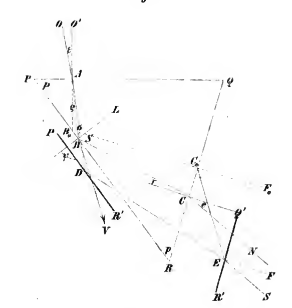
16. $$\operatorname{tang}(\varphi - \gamma) = \frac{gk\sin\varphi}{v' + gk\cos\varphi} \text{ *)}.$$

Da stets $\gamma < \varphi$, so bildet der Strahl mit der Bewegungsrichtung einen kleineren Winkel als die Wellennormale; er wird ihr zugedrängt.

Was schliesslich den Werth der Constante k betrifft, so ergibt sich derselbe aus den Erfahrungen am Reflexionsprisma.

*) Wie man unter Annahme einer Entrainirung ($k = K$) die zusammengehörigen Werthe von v'_1, r und $\varphi - \gamma$ unmittelbar erhält aus der Combination der Geschwindigkeiten v' und gk, ist wohl überflüssig auszuführen.

Fig. 14.



Sei (Fig. 14) PQR der Hauptschnitt eines gleichschenkligen Prisma, wie solche für die gebrochenen Fernrohre der Sternwarten verwandt werden. Die scheinbare Richtung eines Sternes falle zusammen mit dem Einfallslothe der Vorderfläche $O'A$, und das Prisma bewege sich in der Richtung BV, die mit dem verlängerten zweiten Lothe den Winkel ψ einschliesse.

Der Aberrationsfehler der Aufstellung beträgt dann:

$$\varepsilon = a_1 = \frac{g}{v} \sin(\psi - p),$$

und unter diesem Winkel fällt die Welle auf die Vorderfläche auf. Nun ist:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sigma = \varrho + p, \quad s = \sigma + \varDelta\sigma = r + p,$$
$$r = \varrho + \varDelta\sigma, \quad e = \varepsilon + n\varDelta\sigma.$$

Wird die austretende Welle mit einem Fernrohr aufgefangen, so ist der scheinbare Austrittswinkel

$$= e + a_2,$$

$$= \frac{g}{v} [\sin(\psi - p) - \sin(\psi + p) + 2n^2(1-k)\sin p \cos\psi]$$
$$= -2\frac{g}{v}[1 - n^2(1-k)]\sin p \cos\psi.$$

Derselbe wird 0, d. h. dem scheinbaren Einfallswinkel gleich, wenn $k = \frac{n^2-1}{n^2}$ genommen wird. In diesem Fall lassen sich also Prisma und Fernrohr zu einem festen System verbinden, und bei der Beobachtung hat man die Aberration der Anfangs- und nicht der Schlussrichtung in Rechnung zu bringen.

Setzt man insbesondere $n = 1$, lässt also die Reflexion im ruhenden Aether vor sich gehen, so ist immer der scheinbare Spiegelungswinkel dem scheinbaren Einfallswinkel gleich.

Indess noch mehr.

Ist AD der der Wellennormale AB zugeordnete Strahl, und gehört ebenso zur Richtung BC der Wellennormale der Strahl DE, so hat zwar der austretende Strahl die Richtung CN, aber den Austrittspunkt E.

Die Lage dieses Austrittspunktes ist nun natürlich gleichgültig, so lange die entsprechende Welle eben ist. Hat dagegen, wie in einem convergirenden oder divergirenden Strahlenbündel, jeder Strahl seine eigene Richtung, so besteht zwischen den einzelnen Austrittspunkten und dem schliesslichen Vereinigungspunkt eine bestimmte Relation. Ersetzt man z. B. das Objectiv des Fernrohrs durch ein äquivalentes, welches die Strahlen schon vor ihrem Eintritt ins Prisma zu durchlaufen haben, und ist $O'A$ die scheinbare Richtung des Centralstrahles, so liegt der gemeinsame Brennpunkt auf ES; man hat daher Fadenkreuz und Ocular auf dem im Punkte E errichteten Lothe EF einzustellen.

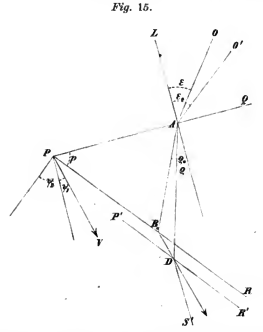
Die praktische Astronomie lehrt, dass auch ein so vorgerichtetes Instrument durchaus brauchbar ist, und dass bei demselben ausschliesslich die Aberration der Eintrittsrichtung in Betracht kommt.

Diese thatsächliche Anwendbarkeit der gebrochenen Fernrohre beweist, dass der Austrittspunkt E für den Centralstrahl

ein bestimmter fester Punkt des Glases selbst ist, der ebenso wie der Eintrittspunkt A auf dem Prisma seine Lage bewahrt, wie immer auch dasselbe bewegt werde. Dieser Austrittspunkt E wird daher kein anderer sein als derjenige Punkt C_0, in dem das Licht im ruhenden Prisma auf dem regelmässigen Wege $A B_0 C_0$ die Hinterfläche desselben erreicht. Und verbindet man C_0 mit E, so wird nicht allein $C_0 E$ der Bewegungsrichtung $B V$ parallel sein, sondern es wird dieselbe auch in der gleichen Zeit vom Glaspunkt C_0 durchlaufen, in welcher der Strahl auf dem Wege $A D E$ nach E hingelangt.

Aus demselben Grunde werden ebenso Glaspunkt B_0 und Strahl $A D$ im gleichen Augenblick in D zusammentreffen.

Fig. 15.



Sei ferner P (Fig. 15) ein Refractionsprisma, welches für den Fall der Ruhe von einem unter dem beliebigen Einfallswinkel ε_0 auffallenden Strahle auf dem Wege $O' A B_0$ durchlaufen wird. Bewegt sich dasselbe in irgend einer Richtung

PV und verfolgt der Strahl, der nach wie vor unter dem gleichen scheinbaren Einfallswinkel auffalle, nunmehr die Strecke AD, so wird derselbe wiederum stets an dem nämlichen Glastheilchen B_0 zum Austritt kommen.

Untersuchen wir einmal die Bedingungen und sodann die Consequenzen dieses Factums!

Zunächst ersicht man, dass die Möglichkeit desselben, wofern die höheren Potenzen von $\frac{g}{v'}$ vernachlässigt werden, geknüpft ist an die Erfüllung der Gleichung:

$$\frac{B_0 D}{AD} = \frac{g}{v'}.$$

Nennt man den Winkel zwischen Strahl und Wellennormale δ und den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Vorder- und Hinterfläche des Prisma resp. ψ_1 und ψ_2, dann ergibt sich aus dem Dreieck $A B_0 D$:

$$B_0 D : AD = \sin B_0 A D : \sin A B_0 D$$

oder wegen:

$$p = \varrho_0 + r_0 = \psi_2 - \psi_1$$

$$\frac{B_0 D}{AD} = \frac{\varrho_0 - \varrho + \delta}{\sin(\varrho_0 + \psi_1)}.$$

Das Brechungsgesetz hat die Form:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho} = \frac{v - g\cos(\varepsilon + \psi_1)}{v' - g(1-k)\cos(\varrho + \psi_1)} = \frac{\sin(\varepsilon_0 - \alpha_1)}{\sin(\varrho_0 - [\varrho_0 - \varrho])}.$$

Und da:

$$\alpha_1 = \frac{g}{v}\sin(\varepsilon + \psi_1),$$

so leitet sich in bekannter Weise ab:

$$\varrho_0 - \varrho = \frac{g}{v}\left[\frac{\sin\psi_1}{\sin\varepsilon} + n(1-k)\cos(\varrho + \psi_1)\right]\operatorname{tang}\varrho.$$

Andererseits hat man zufolge Gl. 16:

$$\delta = \frac{g}{v'} k \sin(\varrho + \psi_1).$$

Addirt man dasselbe zu $\varrho_0 - \varrho$, so erhält man nach leichter Reduction:

$$\varrho_0 - \varrho + \delta = \frac{g}{v}\left[\sin\psi_1\left(\frac{1}{n} + nk\right) + n\cos(\varrho + \psi_1)\sin\varrho\right]\frac{1}{\cos\varrho}.$$

Und wenn n als Factor herausgehoben und durch $\sin(\varrho + \psi_1)$ dividirt wird:

$$\frac{B_0 D}{AD} = \frac{g}{v'}\,\frac{\sin\psi_1\left(\frac{1}{n^2} + k\right) + \cos(\varrho + \psi_1)\sin\varrho}{\cos\varrho\,\sin(\varrho + \psi_1)}.$$

Die Identificirung dieses Ausdrucks mit dem oben erhaltenen führt zur Bedingungsgleichung:

$$\frac{\sin\psi_1\left(\frac{1}{n^2}+k\right)+\cos(\varrho+\psi_1)\sin\varrho}{\cos\varrho\sin(\varrho+\psi_1)}=1$$

oder:

$$\frac{1}{n^2}+k=1,\quad k=\frac{n^2-1}{n^2}.$$

Was hier speciell bezüglich der Brechung nachgewiesen wurde, überträgt sich ohne Weiteres auch auf die Spiegelung.

Es überträgt sich ferner auf alle zwischen A und B_0 (Fig. 14 und 15) sowie auf alle zwischen B_0 und C_0 (Fig. 14) liegenden Glaspunkte. Ein jeder derselben trifft in dem nämlichen Augenblick in einem Punkte der Strahlenrichtung AD.... ein, in welchem ein Wellenelement durch diesen Punkt des Raumes hindurchgeht.

Construirt man daher in einem ruhenden durchsichtigen Mittel die einem bestimmten äusseren Einfallswinkel entsprechende Richtung der inneren Strahlen und legt um dieselbe eine unendlich dünne cylindrische Röhre, dann wird jedes durch die Vorderfläche eintretende Wellenelement auch dann noch durch die Axe der Röhre hindurchgleiten, ohne ihre Wandungen zu berühren, wenn Mittel und Röhre nach beliebiger Richtung und mit beliebiger Geschwindigkeit verschoben, aber zugleich so gedreht werden, dass sich der scheinbare äussere Einfallswinkel stets constant erhält.

So führte demnach eine jede Combination aus Prisma, Objectiv und Fadenkreuz (oder aus Prisma und Dioptern) mit gleicher Schärfe zum Fresnel'schen Werthe des Coefficienten k.

Nach der Entwicklung des eben ausgesprochenen Gesetzes bleibt über den von Boscovich vorgeschlagenen Versuch nicht viel zu sagen übrig. Bei diesem Versuch handelt es sich um die Bestimmung der Aberrationsconstante eines (etwa geradaxigen) Fernrohres, dessen innerer Raum mit einem ponderablen Mittel gefüllt ist.

Schon Fresnel selbst wies nach, dass seine Hypothese — sowie es auch früher die Emanationstheorie gethan hat — die Unabhängigkeit der Aberrationsconstante von der Natur des eingeschalteten Mittels verlangt. Mit Rücksicht auf einige von Klinkerfues und von mir nach dieser Richtung ausgeführte Versuche möge die Fresnel'sche Behandlung etwas verallgemeinert werden. Sei (Fig. 16) AA' die Axe eines Rohres, das zwischen A und B eine planparallele Schicht eines Mittels vom Brechungsexponenten n enthält; bei F befinde sich ein Fadenkreuz, und die Längen AF und AB heissen f, resp. d. Es sei endlich OA die Normale einer auffallenden ebenen Welle, und das Rohr bewege sich senkrecht zur Richtung OA von links nach rechts.



Fig. 16.

Nenne ich den Einfallswinkel ε und denke mir bei A die Huyghens'sche Construction ausgeführt, so wird der Brechungswinkel ϱ der Wellennormale nahezu $= \frac{\varepsilon}{n}$ sein. Was den Winkel δ zwischen Strahl und Wellennormale betrifft, so ist gemäss 16:

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{gk \sin \varphi}{v' + gk \cos \varphi},$$

und da φ nahezu gleich 90^0 und die höheren Potenzen von $\frac{g}{v'}$ vernachlässigt werden dürfen:

$$\delta = \frac{g}{v'} k,$$

wie sich ja für eine Entrainirung auch unmittelbar aus der Figur ergibt. Der von A ausgehende Strahl erreicht die Ebene des Fadenkreuzes in einem Punkte G, und es ist:

$$FG = f \,.\, \varepsilon + d\,(\varepsilon - \varrho) + \frac{g}{v'} k.$$

Dazu ist eine Zeit nöthig, die sich nahezu findet $= \frac{d}{v'} + \frac{f-d}{v}$.

Währenddess durchlaufe das Fadenkreuz eine Strecke FF', so dass:

$$FF' = g\left(\frac{d}{v'} + \frac{f-d}{v}\right).$$

Die Punkte F' und G differiren daher um den Winkel:

$$w = \frac{FF' - FG}{f} = \frac{g}{v}\left\{1 + \frac{d}{f}\left[n(1-k) - 1\right]\right\}$$
$$- \varepsilon\left[1 - \frac{d}{f}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right].$$

Setzt man $w = 0$, so wird ε die Aberrationsconstante, und dann folgt aus der Annahme: $\varepsilon = \frac{g}{v}$ die Bedingung:

$$n(1-k) = \frac{1}{n}, \quad k = \frac{n^2-1}{n^2}.$$

Würde man dagegen das Rohr unter dem gewöhnlichen Aberrationswinkel aufstellen und dem k andere Werthe beilegen, so wäre:

$$w = \frac{g}{v}\left[n(1-k) - \frac{1}{n}\right]\frac{d}{f}.$$

Klinkerfues z. B. setzt $k = 0$ und erhält so:

$$w' = \frac{g}{v}\,\frac{d}{f}\,\frac{n^2-1}{n}, \quad \varepsilon' = \frac{g}{v}\,\frac{1 + \frac{d}{f}(n-1)}{1 - \frac{d}{f}\,\frac{n-1}{n}}.$$

Bei Ausführung der Versuche muss die Axe AA' irgendwie fixirt werden. Sieht man ihrer Lichtschwäche halber von Dioptern ab, so genügt es, das Rohr bei A durch ein Objectiv von der Brennweite AF zu schliessen. Es dringen dann zwei congruente, von G und F' ausgehende Kugelwellen in's Auge. Wollte man bei A' ein Ocular*) hinzufügen und das Rohr unter dem als variabel angenommenen Aberrationswinkel

*) Fadenkreuz und Lupe genügen natürlich auch für sich; es handelt sich dann darum, das Flächenelement, welches die vom Stern ausgehende ebene Welle als Tangentialebene an die vom Fadenkreuz ausgesandte Kugelwelle mit dieser letzteren gemein hat, in's Auge zu schaffen. Befindet sich dabei die planparallele Schicht oberhalb des Fadenkreuzes, so ist natürlich die Richtung des »Strahles« gleichgültig. Das ist aber nicht der Fall, wenn sie zwischen Fadenkreuz und Ocular eingeschaltet wird.

anfstellen, so müsste das brechende Mittel das ganze Rohr zu beiden Seiten des Fadenkreuzes ausfüllen, widrigenfalls wenigstens die austretenden Strahlen nicht mehr symmetrisch liegen zur Ocularaxe. Bei Benutzung irdischen Lichtes lässt sich die brechende Schicht am vortheilhaftesten zwischen das Sehzeichen und Objectiv des Collimatorrohres einschieben.

Ich habe den Boscovich'schen Versuch in dieser letzteren Art ausgeführt und mich einer 10,5 Zoll langen Wassersäule bedient. Setzt man $\frac{g}{v}$ für die Nord - Süd - Stellung um Mittag $= 20,''4$; $d = 10,5$; $f = 15$; $n = 1,3$, so ergibt die Klinkerfues'sche Annahme eine Verschiebung des Bildes, die sich bei der Rotation des Apparates um 180° auf das Doppelte, nämlich auf:

$$2w = 15'',3$$

steigert. Als Sehzeichen benutzte ich statt des Spaltes einen Verticalfaden. Das Beobachtungsrohr ist mit einem Fadenmikrometer versehen, mittelst dessen ein beweglicher Verticalfaden sich an einem festen vorbeischieben lässt; die scheinbare Breite dieser Fäden beträgt etwa 5''. Es wurde nun der Faden des Sehzeichens so zwischen die beiden Ocularfäden gebracht, dass zwischen den drei dunklen Linien zwei schmale helle übrig blieben. Die Rotation des Apparates änderte an dieser Einstellung auch nicht das Mindeste.

Dasselbe Experiment wurde übrigens schon 1863 von L. Respighi [1]) in Bologna mit vollkommneren Hülfsmitteln und mit dem gleichen negativen Erfolg angestellt. Die Versuche von Klinkerfues mit Sternenlicht [2]) scheinen noch nicht abgeschlossen zu sein, indess erklärt derselbe bereits, dass die etwaigen Verschiebungen seinen Erwartungen nicht entsprächen.

Klinkerfues hat die Delambre'sche Aberrationsconstante $= 20,''255$, die nach der Römer'schen Methode

1) Memor. di Bologna (2) II, 279.

2) Die Aberration der Fixsterne. 1867; Göttinger Nachrichten 1870. — Nach Challis (Phil. Mag. 1872) sollen ähnliche Versuche auch auf der Sternwarte zu Greenwich beabsichtigt sein.

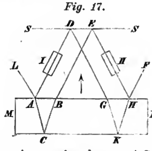


gewonnen ist, mit der Struve'schen $= 20,''449$ dadurch in Uebereinstimmung zu bringen gesucht, dass er in der letztgegebenen Formel unter $\frac{g}{v}$ die erstere und unter d die mittlere Glasdicke des Fernrohrobjectives versteht, und in der That erhält er einen mit der letzteren übereinstimmenden Werth. Ist nun aber die Glasmasse der Linse selbst insoweit keines Einflusses fähig, als sie in der Mitte eine andere Dicke hat als am Rande*), so ist dieselbe zur Erklärung der in Rede stehenden Differenz vollends unbrauchbar.

Die vorstehende Erörterung wird gezeigt haben, dass die Unterschiede zwischen Strahl und Wellennormale hier die nämlichen sind wie bei der doppelten Brechung, und mir scheint das Verhalten „der einfach brechenden Mittel mit extraordinärem Strahle" instructiv genug, um es etwa in Vorlesungen der Theorie jener mit Vortheil vorauszuschicken.

Zum Abschluss dieser Betrachtungen möchte ich einen von mir angestellten Interferenzversuch besprechen, dessen negatives Resultat gleichfalls die Fresnel'sche Hypothese bestätigt.

Fig. 17.



Es sei MM (Fig. 17) eine dicke, planparallele und an der Hinterfläche belegte Glasplatte, der in einiger Entfernung ein ebener Metallspiegel SS annähernd parallel gegenüberstehe. Jeder auf die Platte fallende Strahl LA zerlegt sich im Punkte A in einen reflectirten Strahl AD und in einen gebrochenen AC. Letzterer erleidet in C eine Reflexion und tritt nach einer partiellen Brechung in B als Strahl BE (parallel zu AD) aus dem Glase aus. Am Spiegel erleiden beide eine Reflexion nach den Richtungen DG, resp. EH. Der erstere, der in A einfach gespiegelt worden, erlei-

*) Man kann dieselbe ja ansehn als ein Aggregat unendlich vieler und unendlich kleiner Prismen.

det eine partielle Spiegelung in G — doch möge der entstehende Strahl vom Auge abgeblendet werden — zum Theil dringt er in das Glas ein und vereinigt sich nach zwei Transmissionen und einer innern Reflexion in K mit dem in der Nähe reflectirten Strahle EH, so dass in der Richtung HF zwei nahezu parallele Strahlen mit wenig verschiedenen Amplitüden und einem kleinen Gangunterschiede zum Auge vordringen. Das entstehende Fransensystem ist das nämliche, das unter dem Namen des Jamin'schen bekannt ist; es möge irgendwie mittelst eines Fadenkreuzes fixirt werden. Die Stellung der Interferenzstreifen ändert sich nicht, wie auch der Apparat, der mit der Geschwindigkeit g im Raume fortschreitet, orientirt werde.

Es mögen nun zwei gleiche, planparallel abgeschliffene und mit gleichen planparallelen Platten verschlossene Röhren so zwischen die Spiegel gebracht werden, dass nicht bloss jeder der beiden interferirenden Strahlen durch je ein Rohr hindurchgeht, sondern dass auch der eine, als AD, bei seiner Entfernung von der Platte MM, der andere, als EH, bei seiner Annäherung an dieselbe das Rohr passirt. Füllt man die Röhren mit Flüssigkeit, z. B. mit Wasser, so bleibt wiederum die Stellung der Fransen von jeder Drehung des Apparates unabhängig. Und doch gibt es unter diesen Stellungen zwei, für welche das Licht sich in der einen Röhre im gleichen Sinn, in der andern im entgegengesetzten Sinn bewegt wie diese selbst.

Ich gebe die Erklärung dieses Resultates unter der Annahme, dass man sich zur Hervorrufung der Interferenzstreifen eines einfacheren Apparates, etwa der Young'schen Oeffnungen oder der Billet'schen Halblinsen bediene. Es sei SS (Fig. 18) der Spiegel, der von einem Spalt L aus mittelst eines Collimatorrohres, vor dessen Objectiv sich ein Schirm mit den beiden Oeffnungen A, B befinde, beleuchtet werde. Die entstehenden Fransen mögen mittelst eines Fernrohres beobachtet und dessen Fadenkreuz auf die Mittelfranse eingestellt werden.

Es bleibt dann, entsprechend dem Gesetze auf S. 60,

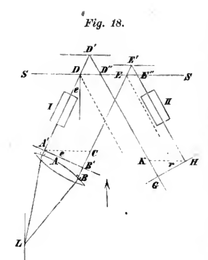


Fig. 18.

auch bei der Bewegung des Apparates der scheinbare Spiegelungswinkel dem scheinbaren Einfallswinkel gleich, und wenn man den wirklichen Einfallswinkel e, den wirklichen Spiegelungswinkel r nennt, so hat sich gemäss 12 für letzteren die Relation ergeben:

$$r = e + 2\frac{g}{v}\sin e,$$

vorausgesetzt, dass die Bewegung, wie wir annehmen wollen, in der Richtung des Lothes des Spiegels vor sich geht.

Denkt man sich jetzt in vorbeschriebener Weise die beiden Röhren eingeschoben, so sind die durch die Bewegung erzeugten weiteren Modificationen dreierlei Art.

Es ändert sich der Brechungsexponent des Inhaltes der Röhren, es ändert sich ihre Länge, und es ändern zugleich die Punkte der Spiegelnng ihre Lage im Raume.

Gesetzt, nach Verlauf der Zeit, die das Licht in der Richtung AD braucht, um den Spiegel zu erreichen, sei dieser von D nach D' fortgerückt. In dem Augenblick ferner, wo Strahl BE den Spiegel trifft, befinde sich derselbe in E', und endlich mögen die bei D' und E' gespiegelten Strahlen die Ebene GH, die mit $KH \parallel DE$ den Winkel r bildet, in den Punkten G und H erreichen.

Zieht man ebenso $A'C \parallel DE$ und macht Winkel $B'A'C$ gleich e, dann ist $A'B'$ die Projection der ungebeugten Hauptwelle, und es bleibt nun zu untersuchen, unter welcher Bedingung die von ihr ausgehenden beiden Stösse im gleichen Augenblick auf der Ebene GH anlangen.

Diese Bedingung liegt offenbar in der folgenden Zeitgleichnng:

$$\left(\frac{A'D}{v, v'_1} - \frac{CE}{v}\right) - \left(\frac{E''H}{v, v'_2} - \frac{D''K}{v}\right) + \frac{2(DD' - EE')}{v} + \frac{KG - B'C}{v} = 0,$$

wo:

$$v'_1 = v'\left(1 + \frac{g}{v'} k \cos e\right), \quad v'_2 = v'\left(1 - \frac{g}{v'} k \cos e\right)$$

bedeutet und durch $\frac{A'D}{v, v'_1}$ angedeutet werden soll, dass die Strecke $A'D$ zum Theil mit der Geschwindigkeit v, zum Theil mit v'_1 durchlaufen wird.

Zur Abkürzung werde $g \cos e = g'$ gesetzt.

Da Rohr I eine scheinbare Verlängerung, Rohr II eine Verkürzung erfährt, so erhält man leicht:

$$\frac{A'D}{v, v'_1} - \frac{CE}{v} = L\left(1 + \frac{g'}{v'}\right)\left(\frac{1}{v'_1} - \frac{1}{v}\right),$$

$$\frac{E''H}{v, v'_2} - \frac{D''K}{v} = L\left(1 - \frac{g'}{v'}\right)\left(\frac{1}{v'_2} - \frac{1}{v}\right),$$

wenn nämlich unter L die wirkliche Länge der Röhren verstanden wird.

Ferner ist:

$$KG = KH \sin r = [A'C - 2(DD' - EE') \sin e] \sin r,$$

$$\sin r = \sin e + 2 \frac{g}{v} \sin e \cos e,$$

$$A'C \sin r = B'C\left(1 + 2\frac{g'}{v}\right),$$

und sonach nahezu:

$$\frac{KG - B'C}{v} = 2\frac{g'}{v}\frac{B'C}{v} - 2\frac{(DD' - EE')}{v} \sin^2 e$$

und:

$$\frac{KG - B'C}{v} + 2\frac{DD' - EE'}{v} = 2\frac{g'}{v}\frac{B'C}{v} + 2\frac{(DD' - EE')}{v} \cos^2 e.$$

Andererseits erhält man:

$$DD' \cos e = g\left[\frac{A'D}{v} + L\left(1 + \frac{g'}{v'}\right)\left(\frac{1}{v'_1} - \frac{1}{v}\right)\right],$$

$$EE' \cos e = g\left(\frac{A'D}{v} + \frac{B'C}{v}\right),$$

folglich nahezu:

$$2\frac{DD' - EE'}{v} \cos^2 e = 2\frac{g'}{v} L\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v}\right) - 2\frac{g'}{v}\frac{B'C}{v}.$$

Es schreibt sich daher die Bedingungsgleichung auch so:

$$L\left(1+\frac{g'}{v'}\right)\left(\frac{1}{v'_1}-\frac{1}{v}\right)-L\left(1-\frac{g'}{v'}\right)\left(\frac{1}{v'_2}-\frac{1}{v}\right) + 2L\frac{g'}{v}\left(\frac{1}{v'}-\frac{1}{v}\right)=0.$$

Ersetzt man v'_1 und v'_2 durch ihre Werthe und reducirt, so kommt schliesslich:

$$2\frac{g}{v}\left[n(1-k)-\frac{1}{n}\right]\cos e=0.$$

Wenn man erwägt, dass ausser den in diesen Aufsätzen besprochenen Erfahrungen auch die bereits citirten Versuche Fizeau's mit künstlichen Geschwindigkeiten die Formel Fresnel's bestätigen, so darf dieselbe wohl als Ausdruck des Naturgesetzes betrachtet werden.

ZUSATZ C.

Der Interferenzversuch Fizeau's.

Wie bereits S. 35 angeführt wurde, stellte sich Fizeau[1] die Aufgabe, den Entrainirungscoefficienten der Flüssigkeiten nnd Gase mittelst künstlicher denselben beigebrachter Geschwindigkeiten zn bestimmen, also insbesondere durch den Versuch zu entscheiden, ob demselben der Werth $k = o$, $k = 1$ oder $k = \frac{n^2 - 1}{n^2}$ zukomme. Da dieses Fizeau'sche Experiment in dem noch unentschiedenen Streite zwischen der Fresnel'schen nnd Stokes'schen Aberrationstheorie[2] in ganz überraschender Weise zu Gunsten der ersteren ansfiel, so soll dasselbe etwas ausführlicher besprochen werden.

Der angewandte Apparat hatte die folgende Einrichtung. Aus dem Brennpnnkt (Fig. 19) einer Cylinderliuse L, die sich im Ansatzrohr eines Fernrohrs befand, traten die Sonnenstrahlen fast unmittelbar in dasselbe ein durch eine seitliche, seinem Brennpnnkt sehr nahe spaltförmige Oeffnnng. Eine durchsichtige Glasplatte G, die mit der Axe des Fernrohrs einen Winkel von 45° bildete, schickte sie dnrch Reflexion znm Objective O hin.

Nach Austritt ans demselben trafen die unter sich parallel gewordenen Strahlen eine Doppelspalte S, deren jede dem Eintritt in ein Rohr entsprach. Beide Röhren, planparallel abgeschliffen nnd durch planparallele Glasplatten geschlossen, hatten eine Länge von $1^m, 487$.

Nachdem ein jedes der beiden parallelen Strahlenbündel

1) Compt. rend. T. 83, p. 349; Pogg. Ann. Ergänzungsbd. 3, S. 457.

2) Vrgl. Zusatz J.

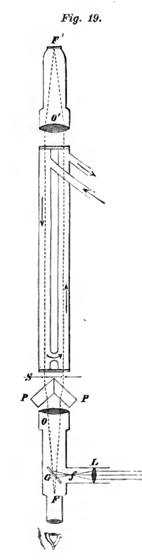


Fig. 19.

diese Länge durchlaufen, erreichten sie das Objectiv O' eines zweiten Fernrohres, brachen sich darin und gelangten so zu dessen Brennpunkt F. Hier trafen sie auf die reflectirende Fläche eines Planspiegels, der sie gegen das Objectiv zurückschickte. Sie vertauschten so ihre gegenseitige Lage, durchdrangen nochmals Objectiv und Röhren, gingen dann in das erste Fernrohr und kamen, nachdem sie die durchsichtige Glasplatte durchdrungen, in dessen Brennpunkt F zur Interferenz. Die entstehenden Fransen wurden mittelst eines, in seinem Brennpunkte mit Theilstrichen versehenen Oculares beobachtet.

Die Interferenzstreifen müssen sehr breit sein, um noch kleine Bruchtheile ihrer Breite schätzen zu können. Nennt man den Abstand der Oeffnungen des Schirmes b, den Abstand der Mitte einer Franse von dem Mittelbilde der Erscheinung (eine anfängliche Gleichheit des Inhaltes der Röhren vorausgesetzt) φ, ihre Breite $\Delta\varphi$, so gelten bekanntlich die Gleichungen:

$b \sin\varphi = m\lambda$, $b \sin(\varphi + \Delta\varphi) = (m+1)\lambda$,

so dass die Breite:

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{b \cos\varphi}$$

dem Abstand der Oeffnungen umgekehrt proportional wird. Da die Entfernung der Axen der Röhren durch die Verhältnisse gegeben ist, so erreichte Fizeau eine Erbreiterung der Fransen dadurch, dass er zwischen Oeffnungen und Objectiv zwei

dicke geneigte Glasplatten P aufstellte, welche die Strahlen gegen einander brachen, die Oeffnungen also virtuell einander näherten und gleichzeitig nur wenig abgelenktes, folglich intensives Licht zur Interferenz brachten.

Der doppelte Durchgang der Strahlen durch die Röhren hatte den Zweck, die durchlaufene Länge des in denselben in Bewegung gesetzten Mittels zu vergrössern und überdies den Einfluss einer zufälligen Verschiedenheit in Temperatur oder Druck zwischen den beiden Röhren ganz zu compensiren, denn daraus hätte eine Verschiebung der Fransen entstehen können, die sich mit der durch die Bewegung erzeugten vermengt und somit die Beobachtung unsicher gemacht haben würde.

Man übersieht nämlich leicht, dass bei obiger Vorrichtung alle auf dem Wege des einen Strahles gelegenen Punkte sich auch auf dem Wege des andern befinden, so dass eine Dichtigkeitsveränderung in irgend einem Punkte der Bahn gleichmässig auf beide Strahlen wirken muss und folglich keinen Einfluss auf die Lage der Fransen haben kann. Dass die Compensation wirklich total sei, davon versicherte man sich, indem man eine dicke Glasplatte bloss vor einer der beiden Spalten anbrachte oder bloss eine der Röhren mit Wasser füllte, während die andere Luft enthielt. Keine dieser beiden Proben veranlasste die geringste Aenderung in der Lage der Fransen.

Dagegen sieht man, dass die beiden Strahlen in Bezug auf die Bewegung entgegengesetzten Einflüssen unterworfen sind, wenn nämlich diese in der Richtung der Pfeile vor sich geht. Zudem leuchtet ein, dass der Effect sich in Folge des Hin- und Rückgangs der Strahlen verdoppelt. Nachdem dann dieser Doppelstrom erzeugt worden, konnte man den Sinn desselben zugleich in beiden Röhren umkehren, und dadurch wurde der Effect wiederum verdoppelt, also im Ganzen vervierfacht.

In die Röhren wurde Wasser gebracht und die Bewegung desselben in einfacher Weise erzeugt. Es stand nämlich jede Röhre durch zwei Abzweigungen nahe an ihren Enden mit

zwei gläsernen Behältern in Verbindung, in welchen man abwechselnd durch comprimirte Luft einen Druck hervorbrachte. In Folge desselben strömte das Wasser durch die Röhren von einem Behälter in den andern. Die Röhren waren von Glas und hatten einen innern Durchmesser von $5^{mm},3$.

Der Druck, unter welchem das Fliessen des Wassers Statt fand, konnte zwei Atmosphären übersteigen. Die Geschwindigkeit wurde berechnet, indem man das Volumen des in einer Secunde ausgeflossenen Wassers durch den Querschnitt der Röhre dividirte. Eine besondere Vorsicht war getroffen, um alle zufälligen Bewegungen zu vermeiden, welche der Druck und der Stoss des Wassers hätten bewirken können. So waren Röhren und Behälter durch Stützen getragen, die von dem übrigen optischen Theile des Apparates unabhängig waren. Kurz: „Raisonnement und Erfahrung“, sagt Fizeau, „zeigten, dass die Bewegungen und Biegungen der Röhren allein ohne Einfluss auf die Lage der Fransen waren.“

Die Beobachtung ergab nun Folgendes:

Sobald das Wasser in Bewegung gesetzt wird, verschieben sich die Fransen und zwar stets so, dass sich die Lichtgeschwindigkeit im Sinne der Bewegung des Wassers vergrössert.

Schon bei einer Geschwindigkeit desselben von 2^m ist die Verschiebung merklich, bei einer Geschwindigkeit von 4^m bis 7^m ist sie vollkommen messbar.

Als die Geschwindigkeit des Wassers $7^m,069$ in der Secunde betrug, fand sich als Mittel aus 19 ziemlich übereinstimmenden Beobachtungen für die einfache Verschiebung 0,23, also nach Umkehr des Stromes für die doppelte 0,46 der Breite einer Franse.

Vergleichen wir jetzt dieses Resultat mit denen, die sich durch Rechnung aus den verschiedenen Annahmen bezüglich des Entrainirungscoefficienten k ergeben.

Heisst L die Länge der Röhren, bedeutet ferner:

$$v'_2 = v' + gk \qquad v'_1 = v' - gk$$

die Lichtgeschwindigkeit im Wasser, je nachdem sich Licht und Wasser im gleichen oder im entgegengesetzten Sinn be-

wegen, dann ist die Verzögerung, um die der Strahl im einen Rohr gegen den andern zurückbleibt,

$$= 2L\left(\frac{1}{v'_1} - \frac{1}{v'_2}\right) = \mu T,$$

wo unter T die Schwingungsdauer des angewandten Lichtes verstanden werde. Heisst ferner die Wellenlänge λ, so bewirkt sonach die Bewegung einen Gangunterschied:

$$2Lv\left(\frac{1}{v'_1} - \frac{1}{v'_2}\right) = \mu\lambda$$

von μ Wellenlängen. Dieser Gangunterschied addirt sich zu dem der Oeffnungen hinzu und bewirkt eine Verschiebung des Fransensystems um die Breite von μ Fransen.

Die letzte Gleichung reducirt sich in bekannter Weise auf:

$$2\frac{g}{v}n^2 k L = \mu\lambda.$$

I. Setzen wir nun $k = 0$, so ergibt sich $\mu = 0$; unter dieser Annahme wäre eine Verschiebung unmöglich.

II. Wäre $k = 1$, würde also aller Aether entrainirt, so erhielte man:

$$\mu = 2\frac{g}{v}\frac{L}{\lambda}n^2$$

und nach Ausführung der Rechnung: $\mu = 0{,}46$ für die einfache oder 0,92 für die doppelte Verschiebung. Die Beobachtung gab eine halb so grosse Zahl.

III. Nimmt man endlich $k = \frac{n^2 - 1}{n^2}$, so findet sich:

$$\mu = 2\frac{g}{v}\frac{L}{\lambda}(n^2 - 1)$$

und in Zahlen $2\mu = 0{,}40$, welcher Werth sehr nahe mit dem beobachteten 0,46 übereinstimmt.

Ein ähnlicher Versuch wie der eben beschriebene wurde zuvor mit bewegter Luft angestellt, und **Fizeau** fand, dass die Bewegung der Luft durchaus keine merkliche Verschiebung der Fransen bewirkt. Da die Geschwindigkeit derselben pro Secunde 25^m betrug, so berechnet sich nach Annahme III, $n = 1{,}000294$ gesetzt, die Verschiebung zu $2\mu = 0{,}000465$ der Breite einer Franse; dieselbe wäre also hiernach ganz unmerklich.

Annahme II dagegen ergäbe einen Betrag von nicht weniger als 0,82 Fransenbreiten.

Fizeau's berühmter Interferenzversuch spricht sonach in positiver und völlig unzweideutiger Weise zu Gunsten der Fresnel'schen Theorie.

* * *

Noch habe ich an dieser Stelle einige Bemerkungen zu machen über den von mir angestellten, S. 67 besprochenen Interferenzversuch. Derselbe ist selbständig von mir concipirt, und ich darf wohl gestehen, dass mir seine Erklärung wegen der Complication der verschiedenen in Betracht kommenden Umstände einige Mühe machte. Erst als ich mich entschloss, die vorliegenden Abhandlungen mit ergänzenden Zusätzen als besondere Schrift herauszugeben, und zu dem Ende die bezügliche Literatur genauer durchsah, entdeckte ich, dass vor mir Herr Babinet denselben oder wenigstens einen ähnlichen Versuch gemacht hat.

Babinet[1]) äussert sich folgendermassen: „J'ai constaté ... que deux rayons interférents, qui traversent deux épaisseurs de verre, égales entre elles, mais parcourues par les deux rayons dans les sens opposés relativement à la direction de ces rayons, produisent les mêmes franges et à la même place, que si la Terre eût été immobile; ce qui est en opposition directe avec une des explications que l'on a données de la fameuse expérience négative de M. Arago, aussi bien q'avec celle que j'avais donnée moi-même dans le Mémoire lu à l'Institut, le 2 novembre 1829."

Die Erklärung des Versuches ist also Babinet nicht gelungen. Später kam Stokes[2]) auf denselben zurück und zeigte, wie in den „Fortschritten der Physik"[3]) referirt wird, dass dieser Versuch, welcher gegen die Fresnel'sche Theorie zu sprechen scheine, in Wahrheit mit derselben in vollem Einklang stehe. Leider habe ich die Beweisführung selbst nicht

1) Compt. rend. T. IX, p. 774.
2) Phil. Mag. V. XXVIII, p. 76.
3) Berl. Berichte Jahrg. 1846, S. 589.

einsehn können, da mir hier die ersten Bände des Phil. Mag. nicht zu Gebote stehen. Auch anderweitig scheint übrigens die Stokes'sche Erklärung nicht sehr bekannt geworden zu sein. Wenigstens bemerkt Fizeau[1]) bezüglich des Babinetschen Versuches, dass er die Umstände desselben in Erwägung gezogen und eine Compensationsursache bemerkt habe, welche den der Bewegung entsprechenden Effect unmerklich machen musste. Diese Ursache liege in der Reflexion, welche das Licht bei diesem Versuche erleide. In der That könne man beweisen, dass, sobald die Strahlen einen gewissen Gangunterschied unter sich besitzen, dieser Unterschied vermöge der Reflexion an einem rotirenden Spiegel geändert werde. Berechne man die beiden Effecte in dem Versuche des Herrn Babinet getrennt, so finde man, dass sie fast gleiche, aber entgegengesetzte Werthe haben.

Neuerdings hat noch Hoek[2]) dem in Rede stehenden Experimente folgende Form gegeben. Denkt man sich den vorbeschriebenen Apparat Fizeau's nach seiner Längsaxe in die Richtung der Erdbewegung gebracht und aus demselben das eine Rohr herausgenommen, so hat man zwei Lichtbündel, die, nachdem sie das Wasser in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, mit einander (ohne Gangunterschied) interferiren. Dieses Arrangement, von dem auch nachgewiesen wird, dass es der Fresnel'schen Formel genüge, ist offenbar ein Specialfall des unsrigen, und beide werden für $e = 0$ identisch.

---

1) Pogg. Ann. Ergänzungsbd. 3, S. 464.

2) Archives Néerlandaises, t. III, p. 180 (1868.)

Abhandlung IV.

(Vergl. Poggendorff's Annalen Bd. CXLIV, S. 550—563.)

Erweiterung des Doppler'schen Princips.

Bei der bisherigen Untersuchung über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in bewegten Mitteln genügte es, sich die primitiven Erschütterungen als einzelne, in beliebigen Zeitintervallen erfolgende Stösse vorzustellen. Nun befinden sich die wirklichen Lichtquellen in einem Zustande periodischer Bewegung, sie senden nach Ablauf regelmässig wiederkehrender Epochen, ihrer sogenannten Schwingungsdauer, gleichartige Impulse in das umgebende Mittel, und diese gleichen Schwingungszustände theilen die Strahlen und Wellennormalen in gleichlange Strecken, die sogenannten Wellenlängen. So bleibt denn noch die Frage zu beantworten, welchen Einfluss die Bewegung eines Mittels und seiner Scheidewände auf die Länge der durchgehenden Wellen ausübt.

Man übersieht nun leicht, dass man auch im Folgenden bei der Vorstellung einzelner, getrennter Wellenstösse verbleiben darf; nur hat man sich dieselben in gleichen Abständen zu denken. Und wenn die Grösse eines solchen Abstandes mit λ, die Geschwindigkeit der Fortpflanzung von Theilchen zu Theilchen mit v und die Zeit, innerhalb welcher der eine Impuls in die

relative Lage des nächstfolgenden eintritt, mit T bezeichnet wird, so besteht die Relation:

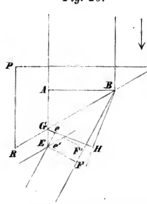
$$\lambda = v \, . \, T.$$

T ist also auch die Zeit, nach Ablauf deren ein bestimmter Punkt des Mittels je wieder einen gleichen Stoss erhält, also seine Schwingungsdauer.

Wichtig sind noch die Punkte der Scheidewand, die den Uebergang der Stösse von einem Medium zum andern vermitteln; sie mögen secundäre Lichtquellen heissen. Es ist klar, dass sie jeden Stoss, sowie er eintritt, auf die andere Seite hinübertragen. — Dagegen wird es im allgemeinen gleichgültig sein, ob auch die Schwingungsdauer der primären Lichtquelle bekannt ist oder nicht.

Nach diesen Vorbemerkungen wende ich mich zunächst zur Modification der Wellenlänge durch die Brechung. Es sei PQR (Fig. 20) ein Prisma, auf dessen Vorderfläche eine ebene Welle senkrecht auffällt. Da die Brechung an der Hinterfläche als Beugungserscheinung aufgefasst werden kann, so muss, wenn GH die austretende Welle und AG und BH zwei beliebige Strahlen sind, der Gangunterschied:

Fig. 20.



$$17. \qquad \frac{AG}{\lambda'} - \frac{BH}{\lambda} = 0$$

sein, und diese Relation lässt sich zur Auffindung des Austrittswinkels benutzen. Bewegt sich das Prisma in der Richtung des Lothes CA und ist EF die austretende Welle, so tritt an die Stelle jener die analoge Gleichung:

$$\frac{AE}{\lambda'_1} - \frac{BF}{\lambda} = 0,$$

wo $\lambda'_1 = \lambda' \left(1 + \frac{g}{v'} k\right)$ bedeutet. In der That ist nahezu:

$$AE = AG\left(1 + \frac{g}{v'}\right), \; BF = BF' + AG\,\frac{g}{v'} \cos(e' - r),$$

und so kommt zunächst, weil noch $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$:

$$n\left(1 + \frac{g}{v'}\right)\left(1 - \frac{g}{v'}k\right)\sin r - \sin e' - \frac{g}{v'}\sin r \cos(e' - r) = 0.$$

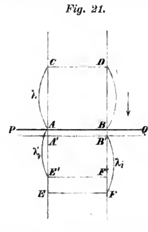
Wird ferner $e' = e + \Delta e$ gesetzt und nach Δe aufgelöst, so ergibt sich:

$$\Delta e = \frac{g}{v}\left[n(1-k) - \cos(e-r)\right] \operatorname{tang} e$$
$$= \frac{g}{v'}\left[\operatorname{tang} e\,(\cos^2 r - k) - \sin r \cos r\right],$$

und dieser Werth ist identisch mit dem, der früher (S. 44) auf umständlicherem Wege erhalten wurde. Sofern λ'_1 und λ zwei in der gleichen Zeit durchlaufene Wegstrecken bedeuten, so erscheint das erhaltene Resultat selbstverständlich. Die Annahme dagegen, dass λ'_1 und λ sich auch in dem vorhin definirten Sinne als innere und äussere Wellenlänge entsprechen, wäre nur dann richtig, wenn sich im Innern des Prismas die Schwingungsdauer constant erhielte.

Betrachten wir jetzt die Vorgänge näher und zwar zuvörderst die Bedingungen, unter denen zwei aufeinander folgende Wellen durch die Vorderfläche eintreten. Hat (Fig. 21) diese Fläche die Lage PQ und sind AB und CD um $\lambda = vT$ von einander abstehende, gleichartige Wellenstösse, so tritt im gezeichneten Moment AB in's Prisma ein und wandert mit der absoluten Geschwindigkeit $v'_1 = v' + gk$ weiter.

Fig. 21.



Nach Verlauf der Zeit T befindet sich Welle CD in AB und Welle AB etwa in $E'F'$. Mittlerweile hat sich aber die Scheidewand mit der Geschwindigkeit g vorgeschoben; sie werde von der nachrückenden Welle in $A'B'$ erreicht. Während der kurzen Zeit $\frac{AA'}{v}$ schreitet aber auch die vorhergehende Welle von $E'F'$ nach EF fort, und andererseits ist eine dritte Welle in die Lage CD gekommen.

Die Bewegung der Scheidewand hat sonach den Abstand zweier inneren Wellen aus AE' in $A'E$ umgewandelt. Dieser Abstand $A'E$ ist die wirkliche innere Wellenlänge, denn er kommt in gleicher Weise sämmtlichen im Innern des Prismas sich folgenden Wellenstössen zu; er werde durch λ_1 bezeichnet. Man hat nun in Berücksichtigung der Proportionen:

$$CA' : AA' = v \; : g$$
$$EE' : AA' = v'_1 : v$$

die folgenden Gleichungen:

$$CA'\left(1 - \frac{g}{v}\right) = CA, \quad A'E = AE' + CA' \frac{g}{v}\left(\frac{v'_1}{v} - 1\right).$$

Die sämmtlichen in Betracht kommenden Längen sind demnach definirt, resp. mit einander verknüpft durch die Relationen:

$$\lambda = vT, \quad \lambda' = v'T, \quad \lambda = \lambda' n;$$

18. $$\lambda'_1 = v'_1 T = \lambda'\left(1 + \frac{g}{v'} k\right), \quad \lambda_1 = \lambda'_1 \left[1 - \frac{g}{v}(n-1)\right]$$

und:

19. $$\lambda_1 = \lambda' \left\{1 + \frac{g}{v}[n(k-1) + 1]\right\}.$$

Da $k = \frac{n^2 - 1}{n^2}$ gefunden wurde, so schreibt sich für letztere auch:

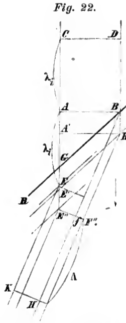
19b. $$\lambda_1 = \lambda'\left(1 + \frac{g}{v}\frac{n-1}{n}\right).$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass diese Ausdrücke in Widerspruch stehen zur Ausführung Fresnel's (Anhang II), welcher λ_1 und λ'_1 mit einander verwechselte*) und dadurch einen Fehler beging, dessen weittragende Consequenzen von Klinkerfues (l. c. S. 23) ausführlich beleuchtet werden.

Wenden wir uns jetzt zur zweiten Brechung. Seien AB und CD (Fig. 22) zwei um λ_1 von einander abstehende innere Wellen, und es stosse im gezeichneten Moment gerade AB auf die Hinterfläche QR auf. Der Grenzpunkt A mag so gewählt sein, dass genau $AE = AC = \lambda_1$. In dem Augenblick, in dem AB als Welle EF' das Prisma verlässt, befindet sich

---

*) Ebenso Billet (Traité d'optique physique t. I. p. 88).



Welle CD in der Lage AB, die Scheidewand aber in der vorgerückten Lage E. Es hat also die neue Welle AB, um diese letztere zu erreichen, noch eine Strecke $A'A$ im Glase zurückzulegen, und in dem Augenblick befindet sich die Scheidewand in $E'B'$. Wiederum vergeht die volle zur Brechung erforderliche Zeit $\frac{\lambda_1}{v'_1}$, und nach Ablauf derselben erscheint $A'B'$ ausserhalb des Prismas in der Lage $E''F''$.

Ist mittlerweile die in E ausgetretene Welle bis KH vorgerückt, so ist der Abstand dieser beiden einander folgenden Wellen $= fH$, und da derselbe für sämmtliche austretende Stösse sich constant erhält, gleich der Wellenlänge des gebrochenen Lichtes. Diese Wellenlänge werde bezeichnet durch Λ.

Die Zeit, welche die zweite Welle gebrauchte, um von der Lage AB in die Lage $E''F''$ übergeführt zu werden, ist offenbar:

$$\frac{AA' + \lambda_1}{v'_1},$$

und während derselben durchläuft die erste die Strecke:

$$FH = \frac{v}{v'_1}(AA' + \lambda_1).$$

Die gesuchte Wellenlänge ist daher gleich der Differenz:

$$FH - Ff = \frac{v}{v'_1}(GE' + \lambda_1) - EE'' \cos(e' - r)$$

$$= \frac{v}{v'_1}\lambda_1 + GE'\left(\frac{v}{v'_1} - \cos(e' - r)\right).$$

Nun ist:

$$GE' = GE\left(1 + \frac{g}{v'_1}\right) = \frac{g}{v'_1}\lambda_1\left(1 + \frac{g}{v'_1}\right);$$

man erhält daher bei Vernachlässigung der kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$\Lambda = \frac{v}{v'_1} \lambda_1 \left[1 + \frac{g}{v}(n - \cos(e - r))\right],$$

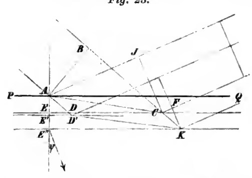
oder wenn λ_1 mittelst der Gleichung 18 durch $\lambda'_1 = v'_1 T'$ ersetzt wird:

20. $$\Lambda = \lambda \left\{1 + \frac{g}{v}[1 - \cos(e - r)]\right\}.$$

So ist denn die Wellenlänge des durchgegangenen Lichtes aus ihrem ursprünglichen Werthe in den vorstehenden umgewandelt; dieser letztere wird nur dann $= \lambda$, wenn $e = r = o$, d. h. wenn keine Ablenkung stattfindet.

Es möge gestattet sein, dieselben Betrachtungen noch auf die Spiegelung auszudehnen. Begnügt man sich mit dem einfachen Falle, dass dieselbe im Weltäther vor sich geht, so gestalten sich die Verhältnisse leicht. Sei PQ (Fig. 23) die

Fig. 23.



Projection eines Spiegels, der sich in der Richtung des Lothes mit der Geschwindigkeit g' bewegt. Eine erste Welle AB braucht zur Reflexion die Zeit $\frac{BC}{v} = \frac{\lambda}{v}$ und gelangt so in die Lage CJ. Inzwischen wird die vorhergehende Welle in die Lage AB gekommen sein; sie findet den Spiegel in der Stellung ED und gebraucht, um ihn in D' zu erreichen, die sehr kleine Zeit $\frac{DD'}{v}$. Jetzt erst beginnt ihre Reflexion, und wenn sie schliesslich in die Lage KF gekommen, hat vom Punkte K ab die erste Welle bereits eine Strecke $= AD'$ zurückgelegt. Es ist also:

$$\Lambda = \lambda + AD' - CF = \lambda + AD' \left\{1 - \sin[e - (90 - r)]\right\}.$$

Setzt man $AD' = AD = \frac{g'}{v}\frac{\lambda}{\cos e}$ und in der Klammer $e = r$, so kommt:

$$21_a. \qquad \Lambda = \lambda\left(1 + 2\,\frac{g}{v}\cos e\,\cos\psi\right),$$

wenn nämlich die Bewegungsrichtung mit dem Lothe den Winkel ψ bildet, so dass $g' = g\cos\psi$. Also auch die Spiegelung ist mit einer Aenderung der Wellenlänge verknüpft.

Die erhaltenen Resultate, die in den Gleichungen 19, 20 und 21 enthalten und mittelst geometrischer Betrachtungen gewonnen sind, lassen sich noch auf einem anderen und zwar kürzeren Wege erzielen. Derselbe besteht in successiven Anwendungen des Doppler'schen Princips und lässt sich folgendermassen ausführen.

Seien λ und T Wellenlänge und Schwingungsdauer einer auf die Vorderfläche des Prismas (Fig. 20) auffallenden Welle. Da diese Scheidewand vor dem ankommenden Lichte zurückweicht, so werden die Punkte derselben gemäss dem Doppler'schen Princip Schwingungen ausführen von der Dauer:

$$T'_s = \left(1 + \frac{g}{v}\right) T.$$

Diese Punkte werden secundäre Lichtquellen für die Theilchen des bewegten Mittels. Nun pflanze sich jede Erschütterung in demselben von Theilchen zu Theilchen mit einer Geschwindigkeit $v_1 = v' + gk'$ fort, und zugleich werde das Mittel als Ganzes mit der Geschwindigkeit $gK = g(k - k')$ vorgeschoben. Man hat dann wie früher (Anm. 2 S. 42):

$$v'_1 = v_1 + g(k - k') = v' + gk,$$

so dass die absolute Geschwindigkeit nach wie vor ihren Werth behält. Andererseits verschiebt sich die Scheidewand mit der absoluten Geschwindigkeit g und sonach gegen die Theilchen des Mittels mit der relativen Geschwindigkeit $g\,(1 - (k - k'))$. Die Uebertragung der Schwingungen seitens der Scheidewand wird nun gerade so vor sich gehen, als ob das Mittel ruhte und in demselben die secundär leuchtende Scheidewand mit der Translationsgeschwindigkeit $g\,(1 - (k - k'))$ bewegt würde.

Demnach erhalten die Theilchen des Mittels eine innere Schwingungsdauer von der Grösse:

$$T_1 = \frac{v_1 - g(1-(k-k'))}{v_1} T_s = \left\{1 + \frac{g}{v}\left[n(k-k'-1)+1\right]\right\} T.$$

Und da die Stösse von Theilchen zu Theilchen mit der Geschwindigkeit v_i sich fortpflanzen, so entstehen Wellen von der Länge: $\lambda_i = v_i T_1$ oder:

$$\lambda_1 = \lambda' \left\{1 + \frac{g}{v}\left[n(k-1)+1\right]\right\}.$$

Dies ist aber der identische Werth mit Gleichung 19, und man ersieht so klar, dass diese innere Wellenlänge weder von der möglichen Modification des v_i noch von der des T_1, d. h. nicht von k', sondern nur von k abhängt.

Die innerhalb des Mittels erzeugten Wellen treffen alsbald einen Punkt der Hinterfläche. Sie sollicitiren ihn mit einer Schwingungsdaner:

$$T_s'' = \frac{v_1 + g(1-(k-k'))}{v_1} T_1 = T_s',$$

so dass die beiden gegen einander in Ruhe befindlichen Scheidewände auch gleiche Schwingungen ausführen. Die Punkte der letzteren sind secundäre Lichtpunkte für den austretenden Strahl; in der Richtung desselben bewegen sie sich mit einer Geschwindigkeit $g \cos(e-r)$, und da sie den abgehenden Wellen folgen, so ist dem Doppler'schen Princip zufolge:

$$\tau = \left[1 - \frac{g}{v}\cos(e-r)\right] T_s' = \left[1 + \frac{g}{v}(1-\cos(e-r))\right] T$$

und sonach:

$$l = \lambda \left\{1 + \frac{g}{v}\left[1 - \cos(e-r)\right]\right\},$$

welcher Werth wieder übereinstimmt mit dem auf geometrischem Wege gefundenen der Gleichung 20.

Das gleiche Verfahren gilt für den Vorgang der Spiegelung. Befindet sich im allgemeinsten Fall der Spiegel im Innern eines ponderablen Mittels und bewegt sich mit der Geschwindigkeit g in einer Richtung, die mit dem Lothe den Winkel ψ, also mit dem einfallenden Strahle den Winkel

$(e - \psi)$ bildet, so erhält man, wenn letzterem λ_1, v_1 und T_1 entsprechen, zunächst für die Punkte der Scheidewand:

$$T_s = \frac{v_1 - g(1 - (k - k')) \cos(e - \psi)}{v_1} T_1, \quad v_1 = v' + g k' \cos(e - \psi)$$

und sodann für den gespiegelten Strahl ($\Lambda_1 = V_1 \tau_1$):

$$\tau_1 = \frac{V_1 + g(1 - (k - k')) \cos(r + \psi)}{V_1} T_s, \quad V_1 = v' - g k' \cos(r + \psi).$$

Folglich, wenn näherungsweise $e = r$ gesetzt wird:

$$21_b. \qquad \Lambda_1 = \lambda_1 \left(1 + 2 \frac{g}{v'} (1 - k) \cos e \cos \psi\right).$$

Wird $n = 1$, also $k = o$ und $\lambda_1 = \lambda$ genommen, so fällt dieser Werth zusammen mit dem der Gleichung 21_a.

Die letzten Gleichungen lassen sich auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{v_1 T_1}{V_1 \tau_1} = \frac{\lambda_1}{\Lambda_1} = \frac{v' - g(1 - k) \cos(e - \psi)}{v' + g(1 - k) \cos(r + \psi)},$$

und vergleicht man diese mit dem in der letzten Abhandlung aufgestellten Ausdruck des modificirten Reflexionsgesetzes (Gl. 13), so ergibt sich:

$$22. \qquad \frac{\sin e}{\sin r} = \frac{\lambda_1}{\Lambda_1}.$$

In der That sind es ja auch identische Betrachtungen, welche sowohl die eine wie die andere Modification bestimmen.

Sofern bei der Brechung an die Stelle der vorletzten Gleichung die ebenso allgemeine folgende tritt:

$$\frac{v T}{v_1 T_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{v - g \cos(e - \psi)}{v' - g(1 - k) \cos(r - \psi)},$$

so erhält man für sie die analoge Relation:

$$23. \qquad \frac{\sin e}{\sin r} = \frac{\lambda}{\lambda_1}.$$

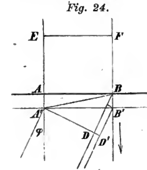
Das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer hat zwar so seine unmittelbare, nicht aber seine mittelbare Bedeutung verloren.

Den Abschluss dieser Untersuchung möge die Theorie der modificirten Beugung bilden. Ich werde zunächst zeigen, dass man mit sogenannten Drahtgittern und Glasgittern die gleichen Resultate erhält, und dass analog gebildete Beziehungen sich auch auf die Beugung ausdehnen. Mittelst derselben

sollen dann die Gittererscheinungen in genereller Weise entwickelt werden.

Sei AB (Fig. 24) die Projection der Vorderfläche einer planparallelen Glasplatte, deren Linien auf dieser Vorderfläche eingeritzt sind und senkrecht stehen auf AB. Unter $AB = b$ verstehe ich die Breite von Oeffnung und Zwischenraum. Das Gitter möge sich abwärts in der Richtung der Normalen mit der Geschwindigkeit g verschieben, und auf dasselbe falle unter dem Incidenzwinkel o eine Folge von parallelen Wellen von einer durch λ und T gegebenen Farbe.

Fig. 24.



Eine erste Welle AB treffe das Gitter in der Stellung AB. Der Stoss derselben macht die Punkte der Scheidewand zu secundären Lichtquellen, so dass dieser Stoss sich mit der absoluten Geschwindigkeit v'_1 um jeden derselben, beispielsweise um B, verbreitet. Währenddess nähert sich eine zweite Welle EF dem Gitter, ihr Stoss trifft dasselbe in der Lage $A'B'$. Wird nun um B die Wellenfläche construirt und an dieselbe von A' aus eine Tangente gezogen, dann repräsentirt dieselbe die gebeugte Wellebene $A'D$, die sich in der Richtung der Normalen BD fortpflanzt. Als Bedingungsgleichung dafür ergibt sich unmittelbar (wo hier $m = 1$):

$$\frac{BD}{v'_1} = \frac{AA'}{v} + mT.$$

Da nahezu: $AA' = gmT$, so ist:

$$BD = v'_1 \, mT\left(1 + \frac{g}{v}\right).$$

Andererseits hat man die geometrische Beziehung:

$$BD = BA' \sin\varphi + AA' \cos\varphi,$$

und wird hierin: $AA' = \frac{g}{v'} BD$ und $BA' = b$ gesetzt, so kommt:

$$BD\left(1 - \frac{g}{v'} \cos\varphi\right) = b \sin\varphi.$$

Die Elimination von BD ergibt dann:

$$b \sin\varphi = m v'_1 T \left[1 + \frac{g}{v}(1 - n\cos\varphi)\right]$$

24. $$= m\lambda' \left\{1 + \frac{g}{v}\left[n(k-1)\cos\varphi + 1\right]\right\}.$$

Rascher zum Ziel führt die Betrachtung der inneren Wellenlänge. Setzt man für den Augenblick $m = 1$, also $AE = \lambda$, dann wird in dem Moment, wo der von B ausgehende Stoss bis D vorgedrungen, Punkt F der zweiten Welle das Gitter in B' erreichen, und so stehen im Innern des Glases die gleichartigen Stösse um die Entfernung $B'D' = \lambda_1$ von einander ab; man findet:

$$\lambda_1 = BD\left(1 - \frac{g}{v'}\cos\varphi\right) = b\sin\varphi.$$

Macht man jetzt den allgemeinen Ansatz:

25a. $$b\sin\varphi = m\lambda_1,$$

der völlig den Beziehungen 22 und 23 entspricht, und bestimmt den Werth von λ_1 mittelst des erweiterten Doppler'schen Princips, so wird die Gleichung 25a mit 24 identisch.

Fällt schliesslich die gebeugte Welle auf die Hinterfläche der Platte auf, so findet Brechung Statt nach dem Gesetze:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin e} = \frac{v' + g(k-1)\cos\varphi}{v - g\cos e}.$$

Demgemäss erhält man:

26. $$b\sin e = m\lambda\left[1 + \frac{g}{v}(1 - \cos e)\right].$$

Dasselbe Resultat ergibt sich mittelst eines Drahtgitters, sofern in Gl. 24 nur $n = 1$, $k = 0$, $\lambda_1 = \lambda$ und $\varphi = e$ zu setzen ist.

Auch bei der Bewegung eines Drahtgitters im freien Aether geht also für das gebeugte Licht eine wirkliche Aenderung der Wellenlänge vor sich. Babinet, der Gleichung 26 zuerst mittelst geometrischer Betrachtungen abgeleitet hat[1]), und ebenso Ångström[2]) und van der Willigen[3]) scheint dieser Umstand entgangen zu sein.

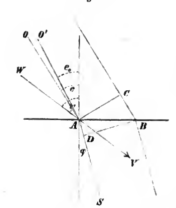
1) Compt. rend. 1862 u. 1864 nach Analogie der weiter folgenden Anmerkung.

2) Pogg. Ann. Bd. CXXIII, S. 500.

3) Archives du Musée Teyler, t. I, p. 6.

Auf den zuletzt entwickelten Principien bauen sich nun die allgemeinen Formeln der Gittererscheinungen in folgender Weise auf. Sei AB (Fig. 25) wieder die Projection eines Gitters, das sich in der Richtung WV, unter dem Winkel ψ gegen das Loth, mit der Geschwindigkeit g bewegt. Auf dasselbe falle von einem Sterne aus der scheinbaren Richtung $O'A$ eine Folge von Wellen von bestimmter Farbe (λ, T). Dieselben mögen durch Beugung ihre Farbe umwandeln in (A, τ) und in der Richtung AS das Gitter verlassen, um mittelst eines Fernrohres beobachtet zu werden.

Fig. 25.



Richtungswinkel und Wellenlängen sind verknüpft durch die Gleichung:

$$25_b. \qquad b\left(\frac{\sin e}{\lambda} - \frac{\sin \varphi}{A}\right) = m.$$

Die von der Bewegung herrührenden Richtungsänderungen sind, wie früher, dreifacher Art.

1) Man glaubt das Gitter unter dem Winkel e_0 eingestellt zu haben, während der wirkliche Einfallswinkel:

$$e = e_0 + \alpha_1$$

beträgt. Man hat daher nahezu:

$$\cos e \quad \delta e - \cos \varphi \quad \delta \varphi = 0$$

$$\delta \varphi = \frac{\cos e}{\cos \varphi}\, \delta e = \frac{g}{v} \frac{\cos e}{\cos \varphi} \sin (\psi - e).$$

Verglichen mit einem unter e_0 aufgestellten ruhenden Gitter ist also zu φ_0 das Increment $\delta \varphi$ zu addiren.

2) Behufs Berechnung der physischen Aberration der Beugung hat man die Wellenlänge A mittelst des erweiterten Doppler'schen Princips aus dem ursprünglichen Werthe λ abzuleiten*).

*) Man kann auch die Gitteröffnungen als hohl betrachten, durch die hindurch die Wellenverbreitung nach den gewöhnlichen Gesetzen

Man hat zunächst für einen Punkt der Scheidewand des Gitters:

$$T_s = T\left[1 + \frac{g}{v}\cos(\psi - e)\right]$$

und für den gebeugten Strahl:

$$\tau = T_s\left[1 - \frac{g}{v}\cos(\psi - \varphi)\right],$$

also:

$$\Lambda = \lambda\left\{1 + \frac{g}{v}\left[\cos(\psi - e) - \cos(\psi - \varphi)\right]\right\}.$$

Sonach folgt:

$$\sin e - \sin(\varphi + \Delta\varphi)\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) = \sin e - \sin\varphi,$$

$$\Delta\varphi = \frac{g}{v}\operatorname{tang}\varphi\left[\cos(\psi - e) - \cos(\psi - \varphi)\right].$$

3) Da die physiologische Aberration des Austrittswinkels denselben zu verkleinern strebt, so beträgt sie:

$$\alpha_2 = -\frac{g}{v}\sin(\psi - \varphi).$$

Die Gesammtsumme der von der Bewegung herrührenden Richtungsänderungen beträgt daher:

$$\Delta = \frac{g}{v}\frac{1}{\cos\varphi}\Big[\cos e\sin(\psi - e) - \cos\varphi\sin(\psi - \varphi)$$
$$+ \sin\varphi\cos(\psi - e) - \sin\varphi\cos(\psi - \varphi)\Big].$$

Sie reducirt sich auf:

$$\Delta = \frac{g}{v}\,\frac{\sin\varphi - \sin e}{\cos\varphi}\cos(\psi - e). \tag{27}$$

---

vor sich geht. Haben sich die Grenzpunkte A und B während der Zeit $\frac{AD'}{v}$ nach A' und B' auf der zu AB Parallelen $A'B'$ verschoben, so tritt an die Stelle der Gleichung $BC - AD = m\lambda$ die analoge: $B'C' - AD' = m\lambda$. Das Gitter hat sich folglich scheinbar um den Winkel $B'AB = \beta$ gedreht, und seine Breite hat den scheinbaren Werth $AB' = b'$. Dem entsprechend erhält man den Beugungswinkel φ' mittelst der Beziehung:

$$b'[\sin(e + \beta) - \sin(\varphi' + \beta)] = b(\sin e - \sin\varphi).$$

Man findet leicht: $b' = b\frac{\cos\psi}{\cos(\psi + \beta)}$ und $\beta = \frac{g}{v}\cos\psi\sin\varphi$ und gelangt so schliesslich zu dem nämlichen Werth von $\Delta\varphi$, wie er im Text anderartig entwickelt ist.

Setzt man $e = \psi = 0$, so erhält man:

27b. $$\Delta = \frac{g}{v} \operatorname{tang} \varphi,$$

welchen Werth Ångström einer von ihm ausgeführten Versuchsreihe [1]) zu Grunde legte.

Ist das zur Beobachtung benutzte Licht terrestrisch, welches durch ein unter dem Einfallswinkel e_0 aufgestelltes Collimatorrohr dem Gitter zugeführt wird, so hat man:

$$b\left(\frac{\sin e}{\Delta_1} - \frac{\sin \varphi}{\Delta_2}\right) = m.$$

Und dann ist:

$$\Delta_1 = \lambda\left[1 - \frac{g}{v}\cos(\psi - e)\right]$$

und wegen $T_s = T$ für die Punkte der Scheidewand:

$$\Delta_2 = \lambda\left[1 - \frac{g}{v}\cos(\psi - \varphi)\right].$$

Dem entsprechend wird:

$$\Delta\varphi = \frac{g}{v}\,\frac{1}{\cos\varphi}\left[\sin e\cos(\psi - e) - \sin\varphi\cos(\psi - \varphi)\right]$$

und schliesslich:

28. $$\delta\varphi + \Delta\varphi + \alpha_2 = 0.$$

Die mit irdischem Licht angestellten Beugungsversuche sind folglich von der Bewegung unabhängig. Gerade wie dieses verhält sich natürlich das Licht derjenigen Himmelskörper, deren relative Bewegung in der Richtung ihrer Verbindungslinie mit der Erde gegen die Geschwindigkeit der Erde in ihrer jährlichen Bahn als verschwindend klein zu betrachten ist [2]).

---

1) l. c. Pogg. Ann. Bd. CXXIII.

2) Dahin gehört vor allen die Sonne. Während nun Ångström in der vorhin citirten Abhandlung trotz der Benutzung von Sonnenlicht positive Zahlenwerthe erhalten zu haben glaubte und auf sie die Formel 27b. anwandte, haben neuerdings die Beobachtungen Mascart's (Ann. de l'École Norm. 1872, Nr. 3) zu einem bloss negativen Resultate geführt. Dasselbe ist aber mit der grösstmöglichen Schärfe und Sicherheit festgestellt. Mascart veröffentlicht ausser einigen älteren Versuchen (an Reflexionsgittern) vier spätere, bei denen das fünfte und neunte Seitenspectrum benutzt wurden. Bei den beiden ersten handelte es sich um die Coincidenz einer hellen Magnesiumlinie mit der entsprechenden dunklen des Sonnenspectrums (Gruppe b). Das Licht fiel

Im Vorstehenden glaube ich bewiesen zu haben, dass die Anwendbarkeit des Doppler'schen Princips sich nicht bloss auf die primäre Lichtquelle, sondern überhaupt auf jeden Punkt bezieht, der als secundärer Lichtpunkt Elementarwellen aussendet. Und wenn bezüglich der letzteren nur diejenige Bewegungscomponente zur Geltung kam, die in die Richtung des empfangenen, resp. abgegebenen Strahles hineinfällt, so wird dasselbe gelten für die primäre Lichtquelle, bezüglich für das empfindende Organ, welches diese Strahlen direct empfängt. So wird denn ein Stern nach einer Richtung, die mit seiner Bewegungsrichtung den Winkel ψ bildet, Wellen aussenden von der Form:

$$29. \qquad y = c \,.\, f\left(\frac{vt - x}{v - g\cos\psi}\right),$$

wenn $f(t)$ die Form der Spontanschwingungen selber bedeutet.

Noch erübrigt, den Fresnel'schen Werth der Constante k auch a priori abzuleiten. Es soll das zunächst mittelst Erweiterung der Fresnel-Cauchy'schen Intensitätsformeln versucht werden.

---

normal ein und wurde um 44°, resp. 68° abgelenkt; nach der Babinet'schen Theorie hätte eine Verschiebung ven 20″, resp. 50″ erhalten werden müssen, dagegen wurde insbesondere beim zweiten Versuch nicht die geringste Abweichung von der Coincidenz bemerkt. Beim dritten wurden der grösseren Gleichförmigkeit wegen die beiden D-Linien des Sonnenspectrums mit den künstlich umgekehrten Linien des Natriums verglichen, und obwohl im fünften Spectrum bei einer Ablenkung von 36° noch eine Verschiebung von fünf Secunden hätte erkannt werden können, so war die beobachtete doch wieder = 0. Ebenso beim letzten Versuch, wo die beiden D-Linien (zwischen denen man sehr hübsch die Nickellinie unterscheiden konnte) mittelst eines aus mehreren Fäden bestehenden Netzes in einem sehr kräftigen Fernrohr verfolgt wurden.

Mascart glaubt so „avec toute la précision possible“ verificirt zu haben:

„1° que la lumière solaire et celle d'une source terrestre de même „periode éprouvent toujours la même diffraction; 2° que le mouvement „de la Terre n'a pas d'influence sur cette diffraction.“

Im Uebrigen gibt derselbe in der angezogenen Arbeit eine Anzahl von Rechnungen, die ich bereits nicht bloss mehrere Monate früher, sondern auch sehr viel allgemeiner (in Pogg. Ann.) veröffentlicht hatte.

ZUSATZ D.

Die Absorption, Dispersion und Rotationspolarisation bewegter Mittel.

1. Die Absorption.

Erzeugt man mittelst eines passend eingerichteten Spectroskopes das discontinuirliche Spectrum einer Lichtquelle, und schaltet irgendwo zwischen Spaltrohr und Auge eine planparallele Schicht eines durchsichtigen, mit electiver Absorption begabten Mittels ein, so lässt sich fragen, ob nicht zwischen den hellen und den entstehenden dunklen Absorptions-Linien Verschiebungen zu erwarten seien, wenn das zwischengebrachte Mittel abwechselnd bald vor den eindringenden Strahlen zurückflieht, bald auf dieselben zueilt. Nimmt man z. B. an, dass das Absorptionsvermögen für irgend eine Farbe von der Bewegung des Stoffes unabhängig und ein für allemal an eine bestimmte Schwingungsdauer geknüpft sei, dann ist es klar, dass bei einer vor dem Strahle fliehenden Bewegung, welche die Oscillationen verlängert, die Absorptionsstreifen nach dem violetten, und bei entgegengesetzter Bewegung, welche dieselben verkürzt, nach dem rothen Ende des Spectrums hingedrängt werden.

Klinkerfues*), der diese Frage zuerst aufwarf, hat sie zugleich durch folgenden Versuch zu entscheiden gehofft.

Eine Petroleumlampe, in deren Flamme ein Sauerstoffstrom eingeleitet wurde, und auf deren Docht man hinlänglich essigsaures Natron brachte, um neben intensivem weissem Lichte zugleich auch Natronlicht zu erhalten, diente zur Be-

*) Göttinger Nachrichten. Jahrg. 1870, S. 226.

leuchtung des Spaltes. Die durch denselben hindurchgegangenen Strahlen fielen auf ein recht mächtiges aus fünf einzelnen Prismen zusammengesetztes analysirendes Prisma (à vision directe) von Merz und wurden dann mittelst total reflectirender Prismen um 90° abgelenkt, dergestalt, dass das entstehende Spectrum gleich nach- oder nebeneinander mittelst zweier sich diametral gegenüberstehender Fernrohre beobachtet werden konnte. Diese letzteren waren mit Mikrometer-Vorrichtung versehen, und der wahrscheinliche Fehler einer einzigen Einstellung auf eine Natriumlinie betrug $^1/_{39}$ des gegenseitigen Abstandes der beiden Linien des Natronspectrums, die bekanntlich in vielen Spectroskopen nicht einmal getrennt gesehen werden. Dieser wahrscheinliche Fehler entspricht einer Aenderung der Wellenlänge von nahe $^1/_{38500}$ derjenigen der *D*-Linie.

Als absorbirendes Mittel wählte Klinkerfues den Bromdampf, der in einem durch planparallele Platten geschlossenen Behälter zwischen Reflexionsprisma und Beobachtungsfernrohr eingeschoben wurde. Und zwar benutzte er von den vielen Streifen des Bromspectrums drei, deren mittlerer nahe der Wellenlänge 0,^{mm}0005734 entspricht, zu Einstellungen.

Denkt man sich das Spaltrohr des Apparates um Mittag in die Nord-Süd-Richtung gebracht, so laufen die Strahlen nach ihrem Austritt aus den Prismen zum einen Fernrohr in der Richtung von Ost nach West und zum andern von Westen nach Osten. Bringt man also das Bromgefäss bald vor das eine, bald vor das andere Objectiv, so durcheilt das Licht den Bromdampf bald im gleichen, bald im entgegengesetzten Sinn von dessen eigner Translationsbewegung. Um Mitternacht ist die fortschreitende Bewegung der Erde die umgekehrte, und lässt man daher die Aufstellung des Apparates ungeändert, so vertauschen die Beobachtungsfernrohre ihre Rolle. Klinkerfues hat die gedachten Versuche während eines Zeitraumes von 40 Tage um Mittag und Mitternacht ausgeführt, und es wurden auf jede Spectrallinie jedesmal 5 Einstellungen, im Ganzen also 15 Einstellungen gemacht. Hierdurch wurde ein Mangel an Schärfe ihrer Begränzung inso-

weit unschädlich, als der wahrscheinliche Fehler einer Messung des Abstandes nur einer Aenderung der Wellenlänge von 0,mm0000000234 entsprach. Mit Recht legt Klinkerfues auf die unmittelbare Vergleichung beider Spectra an zwei einander diametral entgegenstehenden und controlirenden Beobachtungsfernrohren ein grosses Gewicht; es bleiben dadurch z. B. die kleinen Aenderungen der Dispersion der Prismen in Folge von zufälligen Temperaturverschiedenheiten u. s. w. ohne Einfluss auf das Resultat. Dahingegen sagt er nicht, welche Sorgfalt er darauf verwandt, um auch die etwaigen Fehler des Planparallelismus der Deckplatten in ihrer Einwirkung zu neutralisiren. Doch wie dem auch sei, es hat sich gefunden, dass die Einstellungen der ersten 20 Tage fast genau dasselbe Mittel ergaben wie die zweite Hälfte und das Ganze.

Was nun die Verschiebungen selbst betrifft, so hält sie Klinkerfues für thatsächlich erwiesen. Er erhielt nämlich als Summe der ihrer absoluten Grösse nach genommenen Verschiebungen im Mittel für den Bromstreifen der Wellenlänge 0,mm0005734:

$$4 . \Delta\lambda = 0{,}0000000445$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler von $\pm\ ^1/_6$ der gefundenen Grösse. Darnach ändert sich die Wellenlänge der Bromlinie, „und zwar im Sinne der Doppler'schen Theorie“, nur um $^1/_{4 \cdot 12600}$.

Klinkerfues hatte bedentend mehr erwartet. Er hat nämlich den Versuch in der Voraussetzung arrangirt, dass der Apparat sich in translatorisch ruhendem Aether befinde, und ist nun geneigt, den beobachteten Minderbetrag aus einer starken Theilnahme des Aethers an der Erdbewegnng zu erklären.

Mir scheint, dass man zwischen dem Aether in Luft und Prismen und zwischen dem Aether im Bromdampf unterscheiden müsse. Die Bewegung und Wirkung des ersteren sind bekannt und werden durch den in Rede stehenden Versuch nicht im mindesten berührt.

Was dagegen das absorbirende Mittel selbst betrifft, so besteht dasselbe aus einem Aggregat von Körper- und Aether-

theilchen, das eben in seiner Gesammtheit mit electiver Absorption begabt scheint. Bewegt sich dieses Mittel, so lassen sich für den Augenblick zwei extreme Ansichten auseinanderhalten.

I. Bezüglich der absorbirenden Eigenschaft kommt es vorwiegend nur auf die Schwingungen des festen Gerippes (bez. der Scheidewand) an, das sich mit der Translationsgeschwindigkeit g des Apparates bewegt. Gemäss dieser Ansicht würde das Absorptionsvermögen durch Bewegung ebensowenig geändert wie das Absorptionsvermögen für Schall seitens eines bewegten Resonators, und die absorbirte Schwingungsdauer bestimmte sich wegen der relativen Ruhe zwischen Lampe und Brom zu:

$$\text{Const} = T_a = T.$$

Kurz Alles verhält sich wie im Zustand der Ruhe, und von einer Verschiebung wäre auch nicht die Spur zu entdecken.

II. Nach einer zweiten Annahme, die man machen könnte, bliebe das Absorptionsvermögen eines bewegten Stoffes zwar noch unabhängig von der Bewegung, aber es bezöge sich dasselbe auf die durch die Translation und etwaige Entrainirung geänderte Schwingungsdauer der inneren Wellen. Für diese Hypothese würde sich die absorbirte Schwingungsdauer T folgendermassen bestimmen:

Derjenige Strahl, der von der Lampe oder vielmehr von der dem Bromdampf zugekehrten Fläche des Reflexionsprisma (letztere als secundär leuchtend betrachtet) mit der Schwingungsdauer T ausgeht, versetzt einen Punkt des ruhenden Aethers in Schwingungen von der Dauer:

$$T_1 = T\left(1 \mp \frac{g}{v}\right).$$

Fasst man hinwiederum diesen Punkt als secundäre Lichtquelle auf, so gehen dessen Strahlen durch das absorbirende Mittel gemäss Gl. 19 mit der Wellenlänge:

$$\lambda_i = v' T_1 \left(1 \pm \frac{g}{v} \frac{n-1}{n}\right) = v' T \left(1 \mp \frac{g}{v} \frac{1}{n}\right),$$

und sonach wird:

$$T_i = T \frac{v'}{v_i} \left(1 \mp \frac{g}{v} \frac{1}{n}\right).$$

Man erhält darans wegen $T_i = T_a$:

$$T = T_a \frac{v_i}{v'} \left(1 \pm \frac{g}{v} \frac{1}{n}\right).$$

Setzt man nnn als einen Gränzfall $v_i = v'$, also $k' = 0$, $K = k$, so kommt:

$$T = T_a \left(1 \pm \frac{g}{v} \frac{1}{n}\right).$$

Und wenn für den andern Gränzfall $v_i = v' + gk$, also $k' = k$ und die Entrainirung $K = 0$ gesetzt wird, so erhält man:

$$T = T_a \left(1 \pm \frac{g}{v} n\right).$$

Da übrigens für Bromdampf nahezu $n = 1$ ist, so lassen sich die beiden letzten Formeln zusammenfassen in:

$$T = T_a \left(1 \pm \frac{g}{v}\right).$$

Unter dieser II. Voraussetzung würde sich also in der That eine Verschiebung ergeben. Und setzt man $\frac{g}{v}$ gleich $^1/_{10000}$, so müsste die Summe der beiden Verschiebnngen um Mittag nnd Mitternacht nicht weniger als $^1/_{2500}$ der Wellenlänge der Bromlinie betragen. — Es ist dies der Werth, den Klinkerfues erwartet hatte; derselbe macht zwar die nnter I besprochene Annahme, aber er übersieht zngleich die relative Ruhe zwischen Lampe und Bromdampf.

Dürften wir wirklich die von Klinkerfues beobachtete Verschiebung, die ungefähr fünfmal geringer ist als er erwartete, als richtig anerkennen, so würde daraus folgen, dass weder die erste noch viel weniger die zweite Annahme der Natur der electiven Absorption entspricht.

Berechtigter vielleicht scheint die Erwartung, ähnliche positive Erfolge auf den verwandten optischen Gebieten, z. B. bezüglich der Dispersion und Rotationspolarisation, zu erzielen. In der That sind dahin gehende Versuche jüngst von Mascart pnblicirt worden.

2. Die Dispersion.

Was zunächst die gewöhnliche prismatische Dispersion betrifft, so ist dieselbe den neueren Untersuchungen zufolge entweder bedingt durch das Mitschwingen der ponderablen

Theilchen oder durch periodische Dichtigkeitswechsel des zellartig geordneten intramolekularen Aethers oder endlich durch beide Umstände zugleich. Doch wie man auch über die Ursache der Farbenzerstreuung denken mag, die Erfahrung hat gezeigt, dass sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer bestimmten Lichtart mathematisch durch eine unendliche Reihe ausdrücken lässt, deren Glieder nach auf- und absteigenden Potenzen der Quadrate, sei es der Schwingungsdauer oder sei es der innern Wellenlänge der bezüglichen Farbe, geordnet sind.

Während z. B. nach Mascart[1]) der Ausdruck:

$$n = a + \frac{b}{T^2} + \frac{c}{T^4} + q\,T^2$$

zur Darstellung der Dispersionscurve genügt, ziehe ich aus Rücksichten einer inneren Verbindung der vier Constanten, und um für die absorbirte Strecke der anomalen Dispersion imaginäre (anstatt der unendlich grossen Sellmeier's) Brechungsindices zu erhalten, den folgenden vor:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{B - \lambda'^2} + \frac{C}{D - \lambda'^2}\ ^{2)}.$$

---

1) Ann. de l'École Norm. t. I, p. 263.

2) Ketteler: Ueber den Einfluss der ponderablen Moleküle auf die Dispersion des Lichtes und über die Bedeutung der Constanten der Dispersionsformeln Pogg. Ann. Bd. 140, S. 1 u. 177. In der genannten Abhandlung habe ich gezeigt, dass die überwiegende Mehrzahl derjenigen Stoffe, die ich numerisch berechnet habe, innerhalb des ultravioletten Gebietes eine durch zwei „Grenzbrechungsindices" eingeschlossene Zone besitzt, für welche die Ordinaten der Curve imaginär werden. Dieselbe hat hier genau den gleichen Verlauf, wie sie Kundt (Pogg. Ann. Bd. 144, S. 132) für die seitdem von Christiansen (Pogg. Ann. Bd. 141, S. 479) entdeckte sogenannte anomale Dispersion innerhalb der optischen Strahlung thatsächlich beobachtet hat. Wenn nun durch Auflösung einer Substanz mit starker Oberflächenfarbe beliebig viele solcher Unstetigkeiten hervorgerufen werden können, so wird sich die bezügliche Dispersionscurve dadurch erhalten lassen, dass man den Constanten und Gliedern der Curve des Lösungsmittels neue weitere hinzufügt. Der Ausdruck derselben hätte alsdann die Form:

$$v'^2 = \frac{A}{B - \lambda'^2} + \frac{B}{D - \lambda'^2} + \frac{E}{F - \lambda'^2} + \cdots$$

Ich habe ferner hervorgehoben, dass die mittlere Abscisse (Wellen-

Derselbe lässt sich auf die Form bringen:

(a) $$v' = K_1 \lambda'^2 + A_1 + \frac{B_1}{\lambda'^2} + \frac{C_1}{\lambda'^4},$$

und analog lässt sich für den obigen schreiben:

(b) $$v' = q_1 \, T^2 + a_1 + \frac{b_1}{T^2} + \frac{c_1}{T^4}.$$

In beiden Reihen sind die hauptsächlichsten Glieder, die meistens schon für sich zur angenäherten Darstellung ausreichen, die beiden folgenden:

$$A_1 + \frac{B_1}{\lambda'^2}, \qquad a_1 + \frac{b_1}{T^2},$$

und alle unsere vorhergehenden und nachfolgenden Entwicklungen, sofern sie eben von der Dispersion absehen, beziehen sich lediglich auf das bezügliche constante Glied.

Wenn nun bei der Bewegung eines dispergirenden Mittels dieses letztere einen sehr kleinen Zuwachs $g\,k \cos \varphi$ erfährt, so wird schon möglicher Weise die Modification des zweiten Coefficienten B_1, resp. b_1 und gewiss die der folgenden als eine Grösse höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Nun fällt bei der Benutzung einer astronomischen oder terrestrischen Lichtquelle für die scheinbare prismatische Ablenkung der Zuwachs $g\,k \cos \varphi$ aus den Beobachtungsdaten fort; es würde sich daher — vorausgesetzt, dass obige Annahme rich-

länge) der absorbirten Strecke anscheinend nicht bloss für Dichtigkeitsänderungen durch Temperaturwechsel, sondern selbst für die zwei, resp. drei Hauptbrechungsindices einer doppeltbrechenden Substanz constant und gleich sei.

Alles das ist in Uebereinstimmung mit der Theorie von Sellmeier (Pogg. Ann. Bd. 147, S. 386), welche die Dispersion aus dem Mitschwingen der ponderablen Körpertheilchen ableitet. Sellmeier gibt die etwas verschiedene Gleichung:

$$n^2 - 1 = \frac{\Sigma' \frac{T^2}{T^2 - \vartheta^2} a_0^2}{m' a'^2},$$

und darin hat ϑ durchaus dieselbe Bedeutung wie A_0 in der vorhin citirten Abhandlung von mir.

Ob übrigens der vorstehende Sellmeier'sche Ausdruck die Beobachtungen mit gleicher Treue darstellt wie Gl. (a), wird wohl die nächste Zukunft entscheiden.

tig ist — der scheinbare Brechungsindex durch die für den Ruhezustand geltenden Formeln (a) oder (b) ausdrücken lassen, wenn man in denselben unter λ' oder T die modificirte Wellenlänge oder modificirte Schwingungsdauer verstände.

Was nun diese letzteren betrifft, so hat man gemäss Abh. IV und zwar zunächst für eine ruhende Lichtquelle:

$$T_s = T\left(1 + \frac{g}{v}\cos(e-\psi)\right),\quad T_1 = T_s\left[1 - \frac{g}{v'}\left(1-(k-k')\right)\cos(r-\psi)\right],$$

folglich:

$$\text{(c)}\quad T_1 = T\left\{1 + \frac{g}{v}\left[\cos(e-\psi) - n\left(1-(k-k')\right)\cos(r-\psi)\right]\right\}$$

und:

$$\text{(d)}\quad \lambda_1 = \lambda'\left\{1 + \frac{g}{v}\left[\cos(e-\psi) - n(1-k)\cos(r-\psi)\right]\right\}.$$

Für irdisches Licht dagegen wird $T_s = T$, und daher einfacher:

$$\text{(e)}\quad T_1 = T\left[1 - \frac{g}{v'}\left(1-(k-k')\right)\cos(r-\psi)\right]$$

und:

$$\text{(f)}\quad \lambda_1 = \lambda'\left[1 - \frac{g}{v}\,n(1-k)\cos(r-\psi)\right].$$

Setzt man insbesondere, wie es die späteren theoretischen Entwicklungen verlangen, die Entrainirung $K = k - k' = 0$ und $n(1-k) = \frac{1}{n}$, so reduciren sich diese letzteren Formeln auf:

$$T_1 = T\left(1 - \frac{g}{v'}\cos(r-\psi)\right),\quad \lambda_1 = \lambda'\left(1 - \frac{g}{v}\frac{\cos(r-\psi)}{n}\right).$$

Halten wir wieder die beiden möglichen extremen Ansichten, analog denen der S. 97, aus einander. Die eine derselben verlegt den Schwerpunkt der Erscheinung in die Schwingungen des ponderablen Gefüges, an denen auch die mitbewegte Scheidewand Theil nimmt, die andere in die Schwingungen des ruhenden inneren Aethers.

Der ersteren gemäss wäre in Gl. (b) $T = T_s$ einzusetzen und eine Verschiebung der Spectrallinien in Folge der Bewegung des Prisma nur bei astronomischer Lichtquelle zu erwarten.

Was dagegen die zweite betrifft, so liegen einer Bemerkung von Boussinesq*) zufolge Beobachtungen vor von Mascart, die sich bei Anwendung terrestrischen Lichtes der Formel:

$$\omega' = F\left(\frac{1}{T_1^2}\right) + g\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

anschliessen sollen, in welcher ω' die absolute Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Farbe bedeutet, die für den Ruhezustand den Brechungsindex n hat, und in welcher (für $r = \psi = o$):

$$T_1 = T\left(1 - \frac{g}{v'}\right).$$

Die genannte Formel unterscheidet sich von der hier proponirten nur dadurch, dass das zusätzliche Glied $g\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ von Farbe zu Farbe variirt, während es, wenn man $A_1 = a_1 = v_1 = \frac{1}{n_1}$ schreibt:

$$g\left(1 - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

heissen sollte. Im Uebrigen ist die Arbeit Mascart's meines Wissens noch nicht in extenso publicirt, und so bleibt es dahingestellt, ob sich die genannte Differenz nicht auf Beobachtungsfehler wird zurückführen lassen.

3. Die Rotationspolarisation.

Bekanntlich hat Fresnel die eigenthümliche Erscheinung, welche der Quarz in der Richtung seiner Axe zeigt, auf die Annahme zurückgeführt, dass eine einfallende geradlinig polarisirte Welle sich im Krystall in zwei ebene, im entgegengesetzten Sinne kreisförmig polarisirte Wellen zertheile, die denselben mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen.

Ist nämlich die Schwingungsbewegung der einfallenden Welle gegeben durch die Gleichung:

$$\xi = 2A \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

so lässt sich dafür auch schreiben:

$$\xi = A \cos \frac{2\pi}{T} t + A \cos \frac{2\pi}{T} t$$

*) Compt. rend. Nr. 26, Juin 1872.

$$\eta = A \sin \frac{2\pi}{T} t - A \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Die beiden ersten, rechterhand unter einander stehenden Glieder bilden für sich eine linkscirculare, die beiden letzten für sich eine rechtscirculare Bewegung. Pflanzt sich nun beim Eintritt in den Krystall jene mit der Geschwindigkeit ω_1, diese mit der Geschwindigkeit ω_2 fort, so hat man für einen um z hinter der Eintrittsfläche liegenden Aetherpunkt:

$$\xi = A' \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\omega_1}\right) + A' \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\omega_2}\right)$$

$$\eta = A' \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\omega_1}\right) - A' \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\omega_2}\right).$$

Diesen Gleichungen lässt sich auch folgende Gestalt geben:

$$\xi = A' \cos \frac{\pi}{T}\left(\frac{z}{\omega_1} - \frac{z}{\omega_2}\right) \cos \frac{2\pi}{T}\left[t - {}^1\!/_2\left(\frac{z}{\omega_1} + \frac{z}{\omega_2}\right)\right]$$

$$\eta = A' \sin \frac{\pi}{T}\left(\frac{z}{\omega_1} - \frac{z}{\omega_2}\right) \cos \frac{2\pi}{T}\left[t - {}^1\!/_2\left(\frac{z}{\omega_1} + \frac{z}{\omega_2}\right)\right].$$

Man ersieht daraus, dass alle Aetherthcilchen in geraden Linien oscilliren, und dass der Winkel, welchen die Vibrationsrichtung eines derselben mit der X-Axe bildet, gegeben ist durch:

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \frac{\pi}{T}\left(\frac{z}{\omega_1} - \frac{z}{\omega_2}\right).$$

Und da jenseit der zweiten Gränzebene $z = D$ diese Oscillationsrichtung sich erhält, so ist die Polarisationsebene um den Winkel:

(g) $$\varphi = \pi D\left(\frac{1}{\lambda'_1} - \frac{1}{\lambda'_2}\right)$$

gedreht.

Diese Drehung befolgt der Erfahrung zufolge ihr eigenes Dispersionsgesetz, und daher wird weisses Licht, wenn es nach seinem Durchgang durch Quarz zu einem Spectrum ausgebreitet wird, in demselben dunkle Streifen zeigen, deren Zahl von der Dicke der Platte und deren Stellung von dem Winkel der Nicols abhängt.

Wenn nun bei der Translation eines mit Rotationspolarisation begabten Stoffes das molekulare Drehungsvermögen ungeändert bliebe, so würde es genügen, anstatt der Wellenlängen des Ruhestandes die der Bewegung einzusetzen, um

sofort die Modification der Drehung zu erhalten. Es käme so, da $e = r = o$ ist, für irdisches Licht und für $\varphi = o$:

$$\varphi' = \pi D \left(\frac{1}{\lambda'_1} - \frac{1}{\lambda'_2}\right)\left(1 \pm \frac{g}{rn}\right).$$

Setzt man $\frac{g}{v} = {}^1/_{10000}$ und $n = 1{,}5$, so würde, wenn der Apparat um Mittag oder Mitternacht aus der Ost-West-Richtung in die West-Ost-Richtung gebracht würde, die Drehung der Polarisationsebene eine Gesammtänderung von $\frac{1}{7500}$ erfahren.

Mascart*) hat solche Beobachtungen mit einem sehr vollkommenen Apparate und mit dicken Quarzplatten ausgeführt. Das eingeschlagene Verfahren ist wohl ohne weiteres aus der beifolgenden Figur 26 verständlich. Darin bedeutet:

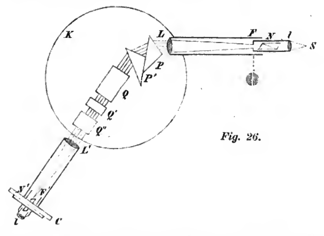


Fig. 26.

S einen kräftigen Inductionsfunken, der zwischen Thalliumdrähten überspringt, oder auch eine intensive Natronflamme.
l ist eine kleine Linse, deren Brennpunkt S ist.
N Polarisator.
F Breiter vertical stehender Spalt.
L Objectiv des Collimators, dessen Brennpunkt F.
PP' Flintglasprismen, die auf einer um eine Verticalaxe drehbaren Platte befestigt sind.
Q, Q', Q'' verschiedene Quarzstücke.
L' Objectiv des Fernrohres mit dem Brennpunkt F.

---

*) Ann. de l'École Normale 1872, Nr. 7, p. 196.

N' Analysirender Nicol, mittelst einer Alhidade um die Axe eines getheilten Kreises drehbar, dessen Nonius die Ablesung einer Minute gestattet.

l' Ocular, mittelst dessen das in F' entstehende Spectrum beobachtet wird.

Es wurden vier linksdrehende und drei rechtsdrehende Platten von 30 bis zu 111 Millimeter Dicke benutzt, so dass mittelst Combination derselben Drehungen von 2240, 4640, 4720 Graden erhalten wurden. Nun ergaben sich z. B. für die beiden letzteren bei Rotation des Apparates um 180° kleine Drehungsunterschiede von $^1/_2$—$^1/_3$ Grad, d. h. nur $^1/_{10000}$ bis $^1/_{15000}$ der totalen Drehung.

Eben so unsicher war das Resultat, als Mascart nach einem Vorgang von Fizeau und Foucault zuerst etwa die linksdrehenden Platten zusammenschichtete, dann durch ein Halbundulations-Glimmerblättchen den linkscircularen Strahl in einen rechtscircularen und umgekehrt umwandelte und nun dieselben durch die zusammengeschichteten rechtsdrehenden Platten hindurchgehen liess. Die Gesammtdrehung wurde so auf 5123, 5785 und 6287 Grade erhöht, aber die Rotationsänderung betrug wiederum nur $^1/_3{}^0$, d. h. $^1/_{20000}$ der totalen.

Berücksichtigt man nun die ausserordentlichen Schwierigkeiten einer solchen photometrischen Messung, so scheint hiernach die Rotationspolarisation von dem Einfluss der Erdbewegung so gut wie unabhängig. Dieses Factum, einmal zugegeben, lässt sich dann folgendermassen erklären:

Wie immer das Gesetz der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden rechts- und linkscircularen Strahlen von der Schwingungsdauer beschaffen sein möge, es lässt sich setzen:

$$\omega_1 = \left(a_1 + \frac{b_1}{T^2} + \ldots\right) + f_1(T), \quad \omega_2 = \left(a_2 + \frac{b_2}{T^2} + \ldots\right) + f_2(T).$$

Geht bei der Translation des Mittels ω_1 in ω'_1, ω_2 in ω'_2 über und bezeichnet man die kleinen Zuwüchse des Werthes der Klammern resp. durch $g k_1$, $g k_2$, so hat man, sofern die etwaigen Modificationen der weiteren Glieder entweder mittelst der Voraussetzung $f_1(T) = f_1(T_s) \ldots\ldots$ beseitigt oder, was

freilich bei der Stärke der Rotationsdispersion wenig angemessen erscheineu dürfte, als Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\omega'_1 = \omega_1 + g k_1, \quad \omega'_2 = \omega_2 + g k_2.$$

Demzufolge wird nach Gl. (f):

$$\frac{1}{(\lambda_i)_1} - \frac{1}{(\lambda_i)_2} = \frac{1}{\lambda'_1 \left[1 - \frac{g}{v} n_1 (1 - k_1)\right]} - \frac{1}{\lambda'_2 \left[1 - \frac{g}{v} n_2 (1 - k_2)\right]}$$

$$= \frac{1}{\lambda'_1} - \frac{1}{\lambda'_2} + \frac{g}{v^2 T}\left[n_1^{\,2}(1 - k_1) - n_2^{\,2}(1 - k_2)\right].$$

Damit nun, wie es die Erfahrung verlangt, das letzte Glied verschwinde, dazu ist ausreichend, dass man setzt:

(h) $$n_1^{\,2}(1 - k_1) = 1, \quad n_2^{\,2}(1 - k_2) = 1,$$

d. h. dass man die Fresnel'sche Formel:

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}$$

auf jeden der beiden circularen Strahlen eines mit Rotationspolarisation begabten Stoffes für sich ausdehnt.

Bekanntlich ist es Fresnel gelungen, im Quarz diese beiden Strahlen zu trennen, und so gibt uns denn das hier gewonnene negative Resultat einen ersten Fingerzeig für das Verhalten der anisotropen Mittel überhaupt.

Im Uebrigen scheint man aus dem freilich noch ungenügenden Beobachtungsmaterial immerhin schliessen zu dürfen, dass der berührte Einfluss des Mitschwingens der ponderablen Theilchen sich am stärksten bei der Rotationspolarisation, weniger stark bei der Absorption und am schwächsten bei der prismatischen Dispersion bemerkbar macht.

Abhandlung V.

(Vergl. Poggendorff's Annalen Bd. CXLVI, S. 406—430.)

Zur Theorie des Fizeau'schen Versuches über die Drehung der Polarisationsebene.

Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes.

Mit der Untersuchung der Modification, welche Amplitüde und Intensität eines gespiegelten und gebrochenen Strahles in Folge der Bewegung der ponderablen Mittel und ihrer Scheidewände erfahren, betrete ich ein Gebiet, welches bisher von der Betrachtung ausgeschlossen war. Es gewährt indess die Möglichkeit, den Fresnel'schen Werth der Constante k, der uns bisher als Ergebniss der Erfahrung und zwar zumeist rein negativer Versuche entgegentrat, auch theoretisch zu begründen. Zudem bieten diese Intensitätsänderungen und die damit verknüpften Drehungen der Polarisationsebene neue experimentelle Hülfsmittel, die Existenz des Lichtäthers sowie die fortschreitende Bewegung der Erde zu erweisen. Ist doch mit Recht der erste, nach dieser Richtung hin von Fizeau*) gethane Schritt mit einem lebhaften und allseitigen Interesse aufgenommen worden.

Zur Kenntniss des vollständigen Spiegelungs- und Brechungsgesetzes, sowie es repräsentirt wird durch die Gleichungen 22 und 23, gelangte man mittelst gleichzeitiger An-

---

*) Fizeau. Pogg. Ann. CXIV, 554; Ann. de chim. et de phys. S. III, T. LVIII, p. 129. — Vrgl. Zusatz E.

wendung des Princips der relativen Geschwindigkeiten sowie des Princips von Doppler. Man erhält dasselbe auf einfacherem Wege, d. h. von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus, mittelst Erweiterung der Fresnel-Cauchy'schen Intensitätsformeln.

Für den Fall eines ruhenden Mittels ist bekanntlich das Problem der Bestimmung der Intensität des gespiegelten und gebrochenen polarisirten Lichtes vornehmlich von Fresnel, Neumann und Cauchy behandelt worden. Sie betrachten den einfallenden Strahl als einen Transversalstrahl, der dann, wenn seine Schwingungen zur Einfallsebene senkrecht sind, in einen gespiegelten und einen gebrochenen Transversalstrahl zerfällt. Dasselbe geschieht nach Fresnel und Neumann, wenn die Schwingungen des einfallenden Lichtes der Einfallsebene parallel sind, während Cauchy noch die beiden möglicher Weise mit erzeugten Longitudinalstrahlen, einen reflectirten und einen gebrochenen, in die Betrachtung hineinzieht. Fresnel und Neumann entwickeln ihre beiden Gränzbedingungen, die eine aus dem Princip der Continuität der Schwingungen der Gränzschichten, die andere aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft. Während aber Fresnel die Elasticität des Aethers in den verschiedenen Mitteln als constant betrachtet und seine Dichtigkeit durch das Quadrat des Brechungsexponenten misst, nimmt Neumann die erstere als variabel und die letztere als constant an.

Denkt man sich jetzt das durchsichtige Mittel sammt seiner Scheidewand in rascher Bewegung, so wird zwar der Grundsatz der Continuität seine Gültigkeit bewahren, indess über die inneren Vorgänge und über die etwaige Veränderung in der Umsetzung der lebendigen Kräfte bleibt man im Ungewissen [1]). So eignet sich denn weder die Fresnel'sche noch die Neumann'sche Anschauung zur beabsichtigten Erweiterung des Problems.

Glücklicher Weise gelangt Cauchy [2]) zu den Fresnel'-

1) Man vergl. indess Zusatz H, der darüber im Anschluss an die inzwischen aufgestellte Theorie Sellmeier's genügend Licht verbreitet.

2) Vergl. Fr. Eisenlohr. Pogg. Ann. Bd. 104, S. 346.

schen Formeln mittelst zweier Gränzbedingungen, die beide aus dem Princip der Continuität herfliessen. Cauchy zerlegt die Schwingungsausschläge im einfallenden und in den beiden gespiegelten und gebrochenen Strahlen nach den drei Coordinatenaxen, von denen die X-Axe mit der Richtung des Lothes zusammenfallen möge, in Componenten und summirt einerseits die gleichgerichteten, die sich auf das erste, und andererseits diejenigen, die sich auf das zweite Mittel beziehen. Nun verlangt der Grundsatz der Continuität, dass die durch diese Summen als Functionen der Lage der Aetherpunkte repräsentirten Curven für die Theilchen der Gränzschicht nicht bloss an einander stossen, sondern auch stetig in einander überfliessen.

Heissen daher ϱ_E, ϱ_R, ϱ'_R, ϱ_D, ϱ'_D die Schwingungsausschläge im einfallenden, reflectirten und durchgehenden Lichte und beziehen sich die accentuirten Zeichen auf die longitudinalen, die unaccentuirten auf die transversalen Strahlen, so bezeichnen sich die nach den Coordinatenaxen gerichteten Componenten in analoger Weise wie folgt:

$$\begin{matrix} \xi_E & \xi_R & \xi'_R & \xi_D & \xi'_D \\ \eta_E & \eta_R & \eta'_R & \eta_D & \eta'_D \\ \zeta_E & \zeta_R & \zeta'_R & \zeta_D & \zeta'_D. \end{matrix}$$

Die Summe der drei ersten Glieder einer jeden Horizontalreihe bezieht sich auf das erste, die Summe der beiden folgenden auf das zweite Mittel. Bezeichnet man sie durch ξ_I, η_I, ζ_I, resp. ξ_{II}, η_{II}, ζ_{II}, so sind die Gränzbedingungen, die für die Punkte der Gränzfläche erfüllt sein müssen, die folgenden:

$$\left.\begin{matrix} \xi_I = \xi_{II} & \eta_I = \eta_{II} & \zeta_I = \zeta_{II} \\ \frac{d\xi_I}{dx} = \frac{d\xi_{II}}{dx} & \frac{d\eta_I}{dx} = \frac{d\eta_{II}}{dx} & \frac{d\zeta_I}{dx} = \frac{d\zeta_{II}}{dx} \end{matrix}\right\} x = 0.$$

Gibt man wieder dem durchsichtigen Mittel sammt seiner Scheidewand eine rasche Translationsbewegung, so ist nicht einzusehen, wesshalb nicht auch jetzt die nämlichen Gränzbedingungen für die nunmehr in Bewegung begriffene Scheidewand ihre Gültigkeit behalten sollen, vorausgesetzt freilich,

dass deren Geschwindigkeit g als hinlänglich klein angenommen wird, um keine Compressionen oder Dilatationen in der Nähe derselben befürchten zu brauchen.

Erster Hauptfall; die Schwingungen des einfallenden Lichtes stehen senkrecht auf der Einfallsebene. Da unter dieser Voraussetzung nur transversale Strahlen möglich sind, so werden, wenn wir die Einfallsebene mit der XY-Ebene zusammenfallen lassen, die Gränzbedingungen die folgenden sein:

$$30. \qquad \zeta_E + \zeta_R = \zeta_D \qquad \frac{d\zeta_E}{dx} + \frac{d\zeta_R}{dx} = \frac{d\zeta_D}{dx},$$

unter ζ die volle Excursion ϱ verstanden und diese Gränzbedingungen auf die bewegten Punkte der Scheidewand bezogen. Bezeichnen wir Einfalls-, Spiegelungs- und Brechungswinkel (von der X-Axe ab gezählt) bezüglich durch α_E, α_R, α_D, so haben wir zunächst für den einfallenden und für den gespiegelten Strahl die Gleichungen:

$$\varrho_E = \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_E} - \delta_E + \frac{x_0 \cos \alpha_E + y_0 \sin \alpha_E}{\lambda_E} \right)$$

$$\varrho_R = R \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_R} - \delta_R + \frac{x_0 \cos \alpha_R + y_0 \sin \alpha_R}{\lambda_R} \right),$$

wenn nämlich die Coordinaten x_0, y_0 auf ein absolut festes System bezogen werden. Ich nehme an, die Scheidewand bewege sich in einer Richtung, die mit dem Lothe den Winkel ψ einschliesst, und mit der Geschwindigkeit g etwa abwärts, und es sollen jetzt die vorstehenden Gleichungen auf ein bewegliches, durch die Scheidewand gelegtes Coordinatensystem bezogen werden, das zur Zeit $t = 0$ mit jenem festen zusammenfällt. Offenbar wird dann, wenn man die neuen Coordinaten x, y nennt:

$$x_0 = x - gt \cos \psi, \qquad y_0 = y - gt \sin \psi.$$

Und so erhält man die Gleichungen:

$$\varrho_E = \cos 2\pi \left[\frac{t}{T_E} - \delta_E + \frac{(x - gt\cos\psi)\cos\alpha_E + (y - gt\sin\psi)\sin\alpha_E}{v\,T_E} \right]$$

$$= \cos 2\pi \left\{ \left[1 - \frac{g}{v} \left(\cos\alpha_E \cos\psi + \sin\alpha_E \sin\psi \right) \right] \frac{t}{T_E} - \delta_E + \frac{x \cos\alpha_E + y \sin\alpha_E}{\lambda_E} \right\}$$

$$= \cos 2\pi \left\{ \left[1 - \frac{g}{v} \cos (\alpha_E - \psi) \right] \frac{t}{T_E} - \delta_E + \frac{x \cos \alpha_E + y \sin \alpha_E}{\lambda_E} \right\}$$

und analog:

$$\varrho_R = R \cos 2\pi \left\{ \left[1 - \frac{g}{v} \cos (\alpha_R - \psi) \right] \frac{t}{T_R} - \delta_R + \frac{x \cos \alpha_R + y \sin \alpha_R}{\lambda_R} \right\}.$$

Was ferner den gebrochenen Strahl anbetrifft, so möge derselbe zuvörderst bezogen werden auf ein Coordinatensystem (X'_0, Y'_0), welches mit den bewegten Aetherpunkten des zweiten Mittels die gleiche Translationsgeschwindigkeit $g(k - k')$ besitzt, und seine entsprechende Gleichung sei:

$$\varrho_D = D \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_D} - \delta_D + \frac{x'_0 \cos \alpha_D + y'_0 \sin \alpha_D}{\lambda_D} \right).$$

Wird derselbe auf ein System bezogen, welches die absolute Geschwindigkeit g, also in Bezug auf das bewegte Mittel die relative Geschwindigkeit $g(1 - k + k')$ besitzt, so ist, wenn die neuen Coordinaten x, y heissen:

$$x'_0 = x - g(1 - k + k') t \cos \psi, \quad y'_0 = g + (1 - k + k') t \sin \psi,$$

und so kommt:

$$\varrho_D = D \cos 2\pi \left\{ \frac{t}{T_D} - \delta_D + \frac{[x - g(1 - k + k') t \cos \psi] \cos \alpha_D + [y - g(1 - k + k') t \sin \psi] \sin \alpha_D}{v_1 T_D} \right\}$$

$$= D \cos 2\pi \left\{ \left[1 - \frac{g}{v_1} [1 - (k - k')] \cos (\alpha_D - \psi) \right] \frac{t}{T_D} - \delta_D + \frac{x \cos \alpha_D + y \sin \alpha_D}{\lambda_D} \right\}.$$

Wenn nun so die sämmtlichen Strahlen auf ein gleiches, durch die Scheidewand hindurchgelegtes und sich mit ihr bewegendes Coordinatensystem bezogen sind, so werden die obigen Gränzgleichungen für alle Punkte von der Lage $x = 0$ erfüllt sein. Demgemäss erhält man:

$$\cos 2\pi \left\{ \left[1 - \frac{g}{v} \cos (\alpha_E - \psi) \right] \frac{t}{T_E} - \delta_E + \frac{y \sin \alpha_E}{\lambda_E} \right\}$$

$$+ R \cos 2\pi \left\{ \left[1 - \frac{g}{v} \cos (\alpha_R - \psi) \right] \frac{t}{T_R} - \delta_R + \frac{y \sin \alpha_R}{\lambda_R} \right\}$$

$$= D\cos 2\pi \left\{ \left[1 - \frac{g}{v_1}(1-(k-k'))\cos(\alpha_D - \psi) \right] \frac{t}{T_D} - \delta_D + \frac{y \sin \alpha_D}{\lambda_D} \right\},$$

$$\sin 2\pi \left\{ \quad \right\} \frac{\cos \alpha_E}{\lambda_E} + R \sin 2\pi \left\{ \quad \right\} \frac{\cos \alpha_R}{\lambda_R} = D \sin 2\pi \left\{ \quad \right\} \frac{\cos \alpha_D}{\lambda_D}.$$

Da diese Gleichungen für alle Werthe von t und y ihre Gültigkeit bewahren, so zerfallen sie in die fünf folgenden:

$$\left[1 - \frac{g}{v} \cos(\alpha_E - \psi) \right] \frac{1}{T_E} = \left[1 - \frac{g}{v} \cos(\alpha_R - \psi) \right] \frac{1}{T_R}$$
$$= \left[1 - \frac{g}{v_1} \left[[1-(k-k')] \cos(\alpha_D - \psi) \right] \right] \frac{1}{T_D}.$$

31. $$\frac{\sin \alpha_E}{\lambda_E} = \frac{\sin \alpha_R}{\lambda_R} = \frac{\sin \alpha_D}{\lambda_D}$$
$$\delta_E = \delta_R = \delta_D$$

32. $$1 + R = D, \quad \frac{\cos \alpha_E}{\lambda_E} + R \frac{\cos \alpha_R}{\lambda_R} = D \frac{\cos \alpha_D}{\lambda_D}.$$

Aus den beiden ersten erhält man, wenn zugleich für v_1 sein Werth $v' \left[1 + \frac{g}{v'} k' \cos(\alpha_D - \psi) \right]$ eingesetzt wird:

33. $$\frac{\sin \alpha_E}{\sin \alpha_R} = \frac{\lambda_E}{\lambda_R} = \frac{v - g\cos(\alpha_E - \psi)}{v - g\cos(\alpha_R - \psi)}$$
$$\frac{\sin \alpha_E}{\sin \alpha_D} = \frac{\lambda_E}{\lambda_D} = \frac{v - g\cos(\alpha_E - \psi)}{v' - g(1-k)\cos(\alpha_D - \psi)},$$

Beziehungen, die mit den früher erhaltenen übereinstimmen, wenn $\alpha_E = e$, $\alpha_D = r$ und $\alpha_R = 180^0 - (e + \Delta e)$ gesetzt wird.

Da die Modification gk' der inneren Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_1 aus dem Werthe von λ_1 herausfällt, so können, wie schon oben hervorgehoben wurde, keine Beugungs- und Interferenzversuche, sondern nur solche, die den Werth von v_1 oder T_1 für sich zu bestimmen gestatten, über die Zulässigkeit der Fresnel'schen Entrainirung entscheiden.

Eliminirt man aus den Gleichungen 32 mit Bezug auf Gleichung 31 D, so erhält man:

34. $$R = -\frac{\sin(\alpha_E - \alpha_D)}{\sin(\alpha_R - \alpha_D)} \frac{\sin \alpha_R}{\sin \alpha_E}, \qquad D = 1 + R.$$

Und wenn die Spiegelung im Innern des ponderablen Mittels vor sich geht, so dass α_E und α_D ihre Stellung vertauschen und α_R sich durch α'_R ersetzt, so kommt analog:

34 b. $R_i = = \frac{\sin(\alpha_D - \alpha_R)}{\sin(\alpha'_R - \alpha_D)} \frac{\sin \alpha'_R}{\sin \alpha_D}$, $D_i = 1 + R_i$.

Folglich wird:

35. $$DD_i = (1 + R)(1 + R_i).$$

Diese Resultate fallen mit denen von Fresnel und Cauchy zusammen, sobald $\alpha_R = 180 - \alpha_E$, ... folglich $g = o$ gesetzt wird.

Zweiter Hauptfall; die Schwingungen des einfallenden Lichtes seien der Einfallsebene parallel. Machen wir diese zur XY-Ebene, so ergibt sich, wie bei Cauchy:

$$\begin{array}{ll}
\xi_E = \varrho_E \sin \alpha_E & \eta_E = - \varrho_E \cos \alpha_E \\
\xi_R = \varrho_R \sin \alpha_R & \eta_R = - \varrho_R \cos \alpha_R \\
\xi'_R = \varrho'_R \cos \alpha'_R & \eta'_R = + \varrho'_R \sin \alpha'_R \\
\xi_D = \varrho_D \sin \alpha_D & \eta_D = - \varrho_D \cos \alpha_D \\
\xi'_D = \varrho'_D \cos \alpha'_D & \eta'_D = + \varrho'_D \sin \alpha'_D,
\end{array}$$

und die Gränzgleichungen sind:

36. $$\left.\begin{array}{ll}
\xi_I = \xi_{II} & \eta_I = \eta_{II} \\
\frac{d\xi_I}{dx} = \frac{d\xi_{II}}{dx} & \frac{d\eta_I}{dx} = \frac{d\eta_{II}}{dx}
\end{array}\right\} x = 0,$$

wofern nämlich sämmtliche Strahlen auf ein in die Gränzfläche fallendes und sich mit dieser bewegendes Coordinatensystem bezogen werden. Bedenkt man noch, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v'_R und v'_D der beiden Longitudinalstrahlen gegen v, resp. v_i als sehr gross anzusehen sind, so sind:

$$\frac{g}{v'_R} = \frac{g}{v} \frac{v}{v'_R}, \quad \frac{g}{v'_D} = \frac{g}{v_i} \frac{v_i}{v'_D}$$

kleine Grössen höherer Ordnung und sonach zu vernachlässigen.

Die vier Gränzgleichungen 36 zerfallen nun in ersichtlicher Weise in die folgenden sieben:

$$\left[1 - \frac{g}{v} \cos(\alpha_E - \psi)\right] \frac{1}{T_E} = \ldots\ldots = \frac{1}{T'_R} = \frac{1}{T'_D}.$$

$$\frac{\sin \alpha_E}{\lambda_E} = \frac{\sin \alpha_R}{\lambda_R} = \frac{\sin \alpha_D}{\lambda_D} = \frac{\sin \alpha'_R}{\lambda'_R} = \frac{\sin \alpha'_D}{\lambda'_D}$$

$$\delta_E = \delta_R = \delta_D = \delta'_R = \delta'_D$$

$$37. \begin{cases} \sin\alpha_E + R\sin\alpha_R + R'\cos\alpha'_R = D\sin\alpha_D + D'\cos\alpha'_D \\ \cos\alpha_E + R\cos\alpha_R - R'\sin\alpha'_R = D\cos\alpha_D - D'\sin\alpha'_D \\ \cos\alpha_E + R\cos\alpha_R + R'\frac{\cos^2\alpha'_R}{\sin\alpha'_R} = D\cos\alpha_D + D'\frac{\cos^2\alpha'_D}{\sin\alpha'_D} \\ \frac{\cos^2\alpha_E}{\sin\alpha_E} + R\frac{\cos^2\alpha_R}{\sin\alpha_R} - R'\cos\alpha'_R = D\frac{\cos^2\alpha_D}{\sin\alpha_D} - D'\cos\alpha'_D \end{cases}$$

wo in den beiden letzten die Wellenlängen durch die bezüglichen Sinus ersetzt sind.

Ausser dem bekannten Spiegelungs- nnd Brechungsgesetz für die Transversalstrahlen erhält man für die Longitudinalstrahlen entsprechend:

$$\frac{\sin\alpha_E}{\sin\alpha'_R} = \frac{v - g\cos(\alpha_E - \psi)}{v'_R} = \frac{v}{v'_R}$$
$$\frac{\sin\alpha_E}{\sin\alpha'_D} = \frac{v - g\cos(\alpha_E - \psi)}{v'_D} = \frac{v}{v'_D}$$

Durch Addition der ersten und vierten nnd dnrch Subtraction der zweiten nnd dritten der Gl. 37 ziehen sich dieselben auf:

$$38. \quad \frac{1}{\sin\alpha_E} + \frac{R}{\sin\alpha_R} = \frac{D}{\sin\alpha_D}, \quad \frac{R'}{\sin\alpha'_R} = \frac{D'}{\sin\alpha'_D}$$

zusammen. Und werden die sich hieraus für D und D' ergebenden Werthe in die beiden ersten eingesetzt, so kommt:

$$\frac{\sin^2\alpha_E - \sin^2\alpha_D}{\sin\alpha_E} + R\frac{\sin^2\alpha_R - \sin^2\alpha_D}{\sin\alpha_R} + R'\frac{\sin\alpha'_R\cos\alpha'_R - \sin\alpha'_D\cos\alpha'_D}{\sin\alpha'_R} = 0$$

$$\frac{\sin\alpha_E\cos\alpha_E - \sin\alpha_D\cos\alpha_D}{\sin\alpha_E} - R\frac{\sin\alpha_R\cos\alpha_R + \sin\alpha_D\cos\alpha_D}{\sin\alpha_R} - R'\frac{\sin^2\alpha'_R - \sin^2\alpha'_D}{\sin\alpha'_R} = 0.$$

Die Elimination von R' ergibt dann, wenn man beachtet, dass:

$$\frac{\sin\alpha_E\cos\alpha_E - \sin\alpha_D\cos\alpha_D}{\sin^2\alpha_E - \sin^2\alpha_D} = \cot(\alpha_E + \alpha_D) \ldots .$$

für R den folgenden Werth:

$$39. \quad R = -\frac{\cot(\alpha_E + \alpha_D) + \tang(\alpha'_R + \alpha'_D)}{\cot(\alpha_R + \alpha_D) + \tang(\alpha'_R + \alpha'_D)} \frac{\sin^2\alpha_E - \sin^2\alpha_D}{\sin^2\alpha_R - \sin^2\alpha_D} \frac{\sin\alpha_R}{\sin\alpha_E}.$$

Dazu gibt die erste der Gl. 38 den zugehörigen Werth von D.

Entwickelt man tang $(\alpha'_R + \alpha'_D)$ unter Berücksichtigung des negativen Zeichens von $\cos\alpha'_R$, so lässt sich dasselbe bekanntlich mit **Cauchy** auf die Form bringen:

$$\tang(\alpha'_R + \alpha'_D) = p\sqrt{-1},$$

und die Erfahrung lehrt, dass p im allgemeinen eine sehr kleine Grösse ist, die sogar für gewisse Substanzen auf den Werth o herabsinkt.

Im Folgenden werde ich p vernachlässigen [1]. Es vereinfacht sich alsdann der Ausdruck für R auf:

$$39_b. \qquad R = + \frac{\sin\alpha_E \cos\alpha_E - \sin\alpha_D \cos\alpha_D}{\sin\alpha_R \cos\alpha_R - \sin\alpha_D \cos\alpha_D} \frac{\sin\alpha_R}{\sin\alpha_E} \text{ [2]},$$

und demgemäss wird:

$$40. \qquad D = \left(1 - \frac{\sin\alpha_E \cos\alpha_E - \sin\alpha_D \cos\alpha_D}{\sin\alpha_R \cos\alpha_R - \sin\alpha_D \cos\alpha_D}\right) \frac{\sin\alpha_D}{\sin\alpha_E}.$$

Sämmtliche Formeln fallen mit denen von Cauchy, resp. Fresnel zusammen, wenn $\alpha_R = 180^0 - \alpha_E$ gesetzt wird.

Ganz analog gestaltet sich die Bildung R_1, D_1, und DD_1.

Wenngleich bei der bisherigen Entwicklung continuirlich verlaufende Strahlen vorausgesetzt wurden, so gelten die erhaltenen Gleichungen doch selbstverständlich auch für Strahlenelemente, d. h. für einzelne, beliebig getrennte Wellenstösse.

Es möge nun eine solche, irgendwie erzeugte ebene Welle unter sehr kleinem Einfallswinkel $\alpha_E = \alpha$ auf einen spiegelnden Körper fallen, der sich nach einer Richtung, die mit dem Lothe den Winkel ψ bildet, mit einer Geschwindigkeit g bewegt. Wird α so klein genommen, dass $\cos\alpha = 1$ und $\sin\alpha = \alpha$ gesetzt werden darf, so erhält man leicht:

$$\frac{(\alpha_R)}{\alpha} = \frac{1 + \frac{g}{v}\cos\psi}{1 - \frac{g}{v}\cos\psi}, \qquad \frac{\alpha_D}{\alpha} = \frac{1}{n} \frac{1 - \frac{g}{v} n(1-k)\cos\psi}{1 - \frac{g}{v}(\cos\psi + \alpha k \sin\psi)}.$$

Und da für $\alpha = 0$ die beiden Gleichungen 34 und 39 zusammenfallen, so kommt:

$$41. \quad R = -\frac{1 - \frac{\alpha_D}{\alpha}}{1 + \frac{\alpha_D}{\alpha}\frac{\alpha}{(\alpha_R)}} = -\frac{n - 1 - \frac{g}{v} n k \cos\psi}{n + 1 + \frac{g}{v} n k \cos\psi} \; \frac{1 + \frac{g}{v}\cos\psi}{1 - \frac{g}{v}\cos\psi}.$$

---

1) Ueber die Zulässigkeit dieser Vernachlässigung und über die Möglichkeit, dass bei der Bewegung $\tang(\alpha'_R + \alpha'_D)$ complex, also etwa $= q' + p'\sqrt{-1}$ werde, vrgl. Zusatz II.

2) In Anbetracht der für $p = 0$ sich ergebenden Phasendifferenz π habe ich in Gl. 39_b. das Zeichen von R gewechselt.

Führt man anstatt der Winkel die bezüglichen Wellenlängen ein, so schreibt sich:

$$R = -\frac{\lambda - \lambda_D}{\lambda_R + \lambda_D}\frac{\lambda_R}{\lambda},$$

und auch so ist klar, dass die in Rede stehende Amplitüde nicht von v_i und T_D, also nicht von k' und $K = k - k'$, sondern einzig von k abhängt. Sie ist daher auch dieselbe für zwei ideelle Mittel, in deren einem der Entrainirungscoefficient $K = 0$ ist, für das also die Geschwindigkeit der Wellen um den vollen Betrag gk anwächst, während in dem andern bei ungeänderter Geschwindigkeit v' die Entrainirung den vollen Werth $K = k$ erreicht.

Verweilen wir einen Augenblick bei diesem letzteren und beachten, dass sich dasselbe für eine unendlich kurze Zeit gerade so verhält, als ob es ruhte.

Nun nimmt aber der Anprall der gegebenen Wellebene und ihre Theilung in die parallele gespiegelte und gebrochene Welle nur eine unendlich kurze Zeit in Anspruch. Es wird daher die Amplitüde dieser beiden Wellen von der Bewegung unabhängig sein, und so wird insbesondere R den Cauchy'schen Werth:

$$-\frac{n-1}{n+1}$$

behalten. Diese nämliche Amplitüde wird daher auch jedem anderen Mittel entsprechen, für welches sich der Coefficient k zugleich auf Entrainirung und Modification der Wellengeschwindigkeit in beliebiger Weise vertheilt.

Andererseits reducirt sich der obige Ausdruck 41 nach Ausführung der Divisionen auf:

$$R = -\frac{n-1}{n+1}\left[1 + 2\frac{g}{v}\left(1 - \frac{kn^2}{n^2-1}\right)\cos\psi\right].$$

Die Identificirung desselben mit dem vorstehenden gibt die Bedingungsgleichung:

$$k = \frac{n^2-1}{n^2}.$$

Sonach führen die erweiterten Cauchy'schen Gränzbedingungen und zwar unabhängig von der Hypothese der Entrainirung mit Nothwendigkeit zum Fresnel'schen Werthe des Coefficienten k.

Hiernach kehre ich zu den continuirlichen Strahlen zurück. Denken wir uns, eine ruhende Lichtquelle, z. B. ein Fixstern, sende unter dem scheinbaren Einfallswinkel e eine Folge von Wellen auf eine sich mit der Erde bewegende Platte. Wegen der auftretenden Aberration beträgt alsdann der wirkliche Einfallswinkel:

$$\alpha = e - \frac{g}{v} \sin(\alpha - \psi).$$

Andererseits hat man für Brechungs- und Spiegelungswinkel:

$$\frac{\sin \alpha_D}{\sin \alpha} = \frac{v'}{v}\left\{1 + \frac{g}{v}\left[\cos(\alpha - \psi) - n(1-k)\cos(\alpha_D - \psi)\right]\right\}$$

$$\frac{\sin \alpha_R}{\sin \alpha} = 1 + 2\frac{g}{v}\cos\alpha\cos\psi$$

$$\frac{\sin \alpha'_R}{\sin \alpha_D} = 1 + 2\frac{g}{v}\, n(1-k)\cos\alpha_D\cos\psi.$$

Führt man noch mittelst der Beziehung $\frac{v'}{v} = \frac{\sin r}{\sin e}$ den scheinbaren Brechungswinkel r ein, setzt der obigen Annahme entsprechend:

$$n(1-k) = \frac{1}{n}$$

und vernachlässigt die kleinen Glieder höherer Ordnung, so erhält man der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sin e\left[1 - \frac{g}{v}\cot e\sin(e-\psi)\right]\\
\cos\alpha &= \cos e\left[1 + \frac{g}{v}\operatorname{tang} e\sin(e-\psi)\right]\\
\sin\alpha_R &= \sin e\left[1 + \frac{g}{v}\cot e\sin(e+\psi)\right]\\
-\cos\alpha_R &= \cos e\left[1 - \frac{g}{v}\operatorname{tang} e\sin(e+\psi)\right]\\
\sin\alpha_D &= \sin r\left[1 - \frac{g}{v}\cot r\,\frac{\sin(r-\psi)}{n}\right]\\
\cos\alpha_D &= \cos r\left[1 + \frac{g}{v}\operatorname{tang} r\,\frac{\sin(r-\psi)}{n}\right]\\
\sin\alpha'_R &= \sin r\left[1 + \frac{g}{v}\cot r\,\frac{\sin(r+\psi)}{n}\right]\\
-\cos\alpha'_R &= \cos r\left[1 - \frac{g}{v}\operatorname{tang} r\,\frac{\sin(r+\psi)}{n}\right].
\end{aligned} \tag{42.}$$

Würde man dagegen allgemeiner:

$$n(1-k) = \frac{1}{n} + q$$

setzen, so erhielte man z. B.:

$$\sin \alpha_D = \sin r \left[1 - \frac{g}{v}\left(\cot r \frac{\sin(r-\psi)}{n} + q\cos(r-\psi)\right)\right]$$

$$\cos \alpha_D = \cos r \left[1 + \frac{g}{v} \operatorname{tang} r \left(\frac{\sin(r-\psi)}{n} + q \operatorname{tang} r \cos(r-\psi)\right)\right]$$

u. s. w.

Diese Ausdrücke sind nun in die für R und D erhaltenen Formeln einzusetzen.

I. Man erhält zunächst für den ersten Hauptfall:

$$\sin(\alpha - \alpha_D) = \sin(e-r) - \frac{g}{v}\left\{\cos(e-r)\left[\sin(e-\psi) - \frac{\sin(r-\psi)}{n} - q \operatorname{tang} r \cos(r-\psi)\right]\right\}$$

$$\sin(\alpha_R - \alpha_D) = \sin(e+r) + \frac{g}{v}\left\{\cos(e+r)\left[\sin(e+\psi) - \frac{\sin(r-\psi)}{n} - q \operatorname{tang} r \cos(r-\psi)\right]\right\},$$

und wenn man den Quotienten derselben mit:

$$\frac{\sin \alpha_R}{\sin \alpha} = \frac{1 + \frac{g}{v}\cos(e-\psi)}{1 - \frac{g}{v}\cos(e+\psi)}$$

multiplicirt, so wird:

$$R = -\frac{\sin(e-r) - \frac{g}{v}\left\{\left[1 - \frac{\cos(e-r)}{n}\right]\sin(r-\psi) - q \operatorname{tang} r \cos(e-r)\cos(r-\psi)\right\}}{\sin(e+r) - \frac{g}{v}\left\{\left[1 + \frac{\cos(e+r)}{n}\right]\sin(r-\psi) + q \operatorname{tang} r \cos(e+r)\cos(r-\psi)\right\}}$$

$$D = 1 + R.$$

Ich knüpfe daran die Behandlung der wichtigsten Specialfälle.

a) Bei scheinbarer senkrechter Incidenz ist $e = r = 0$. Es reducirt sich daher der ganze Ausdruck auf den Quotienten der mit $\frac{g}{v}$ behafteten Glieder, und aus diesen fällt noch der Factor q heraus. So kommt:

$$R = -\frac{n-1}{n+1}.$$

Die Amplitüde des unter dem scheinbaren Incidenzwinkel $e = 0$ reflectirten Strahles kann sich aber von derjenigen, welcher der wahre Einfallswinkel

$$\alpha = e - \frac{g}{v} \sin(\alpha - \psi) = 0$$

entspricht, nur um eine zu vernachlässigende Grösse unterscheiden. Da nun für den Fall $\alpha = 0$, $q = 0$ eine besondere Untersuchung die Richtigkeit der vorstehenden Amplitüde gezeigt hat, so ist man berechtigt, obige Formel auf den in Rede stehenden Specialfall auszudehnen, ohne die nächst höheren Potenzen von $\frac{g}{v}$ hinzuzuziehen zu brauchen.

Ist q nicht $= 0$, so bleibt noch der Einfluss dieser höhern Potenzen zu untersuchen.

b) Für den Polarisationswinkel $e = p$ ist $e + r = 90^0$, $\operatorname{tang} p = n$ und daher:

$$\sin^2 p = \frac{n^2}{n^2+1}, \quad \cos^2 p = \frac{1}{n^2+1}, \quad \cos 2p = -\frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Es kommt dann:

$$R = -\frac{n^2-1}{n^2+1}\left[1 + 2\frac{g}{v}\, q\, \frac{\sin(p+\psi)}{n^2-1}\right].$$

c) Für die scheinbar streifende Incidenz ($e = 90^0$) werden Zähler und Nenner einander gleich; es wird daher:

$$R = -1$$

und sonach unabhängig von jeder Annahme bezüglich des Coefficienten q.

Merkwürdig einfach gestalten sich die Beziehungen, wenn man von vornherein $q = 0$ setzt. Alsdann wird:

$$R = -\frac{\sin(e-r) - \frac{g}{v}\left[1 - \frac{\cos(e-r)}{n}\right]\sin(r-\psi)}{\sin(e+r) - \frac{g}{v}\left[1 + \frac{\cos(e+r)}{n}\right]\sin(r-\psi)}.$$

Und führt man die angedeutete Division aus, so fallen die mit $\frac{g}{v}$ behafteten Glieder fort, und so kommt:

$$43. \qquad R = -\frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)}.$$

Es bleibt also für den ersten Hauptfall die Form der Fresnel-Cauchy'schen Gleichungen bestehen, jedoch enthält dieselbe nicht die wahren, sondern die scheinbaren Einfalls- und Brechungswinkel.

Wäre q nicht $= 0$, so würde doch die Bedingung: $r - \psi = 90^0$ das gleiche Resultat ergeben.

Für eine innere Reflexion erhält man gemäss Gl. 34_b bei Nullsetzung von q:

$$R_1 = \frac{\sin(e-r) - \frac{g}{v}\left[\cos(e-r) - \frac{1}{n}\right]\sin(e-\psi)}{\sin(e+r) - \frac{g}{v}\left[\cos(e+r) + \frac{1}{n}\right]\sin(e-\psi)},$$

so dass sich R_1 aus R gewinnen lässt, wenn e gegen r und v gegen v' vertauscht werden. Dem entsprechend folgt weiter:

$$R_1 = \frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)} = -R$$

44.

$$DD_1 = 1 - R^2 = \frac{\sin 2e \sin 2r}{\sin^2(e+r)}.$$

Diese letzteren Gleichungen sind wiederum die nämlichen, wie sie für eine ruhende Platte gelten.

II. Für den zweiten Hauptfall, für den die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes der Einfallsebene parallel ist, hat man die Ausdrücke 42 in Gl. 39 und 40 zu substituiren. So erhält man, $q = 0$ gesetzt, zunächst:

$$R = -\frac{(\sin 2e - \sin 2r) - \frac{g}{v}\left[2\cos 2e \sin(e-\psi) - 2\cos 2r\,\frac{\sin(r-\psi)}{n} - (\sin 2e - \sin 2r)\cos(e-\psi)\right]}{(\sin 2e + \sin 2r) + \frac{g}{v}\left[2\cos 2e \sin(e+\psi) - 2\cos 2r\,\frac{\sin(r-\psi)}{n} - (\sin 2e + \sin 2r)\cos(e+\psi)\right]}.$$

Betrachten wir wieder die wichtigsten Specialfälle.

a) Für die senkrechte Incidenz, also für $e = r = 0$ wird:

$$R = -\frac{n-1}{n+1}$$

und gelten für dieselbe die oben gemachten Bemerkungen.

b) Fällt der einfallende Strahl scheinbar unter dem Polarisationswinkel auf, so ist:

$$\sin 2p = \sin 2r = \frac{2n}{n^2+1}, \quad \cos 2p = -\cos 2r.$$

Demzufolge wird:

$$R = \frac{g}{v} \frac{\cos\psi - \sin 2p \sin\psi}{\operatorname{tang} 2p \sin p}.$$

Die Amplitüde wird 0 für $\operatorname{tang}\psi_0 = \frac{1}{\sin 2p}$, und sie erreicht ihren Maximalwerth:

$$R_m = \frac{g}{v} \frac{\sqrt{1+\sin^2 2p}}{\operatorname{tang} 2p \sin p}$$

für:

$$\operatorname{tang}\psi_m = -\cot\psi_0, \quad \psi_m = 90^0 + \psi_0.$$

c) Steigt die scheinbare Incidenz bis zur streifenden ($e = 90^0$) an, dann werden Zähler und Nenner gleich, und so kommt:

$$R = +1.$$

Die obige Gleichnng lässt sich bedeutend vereinfachen, wenn man die mit $\cos\psi$ multiplicirten Glieder von den mit $\sin\psi$ multiplicirten trennt nnd die angedeutete Division ausführt. Sie erhält alsdann die Form:

$$\text{45.}\quad \begin{aligned} R &= -\frac{\operatorname{tang}(e-r)}{\operatorname{tang}(e+r)}\left[1 + 2\frac{g}{v}\cos e \frac{(\sin^2 e + \sin^3 r)\cos\psi - \sin 2r \sin\psi}{\cos(e-r)\cos(e+r)}\right] \\ &= -\frac{\operatorname{tang}(e-r)}{\operatorname{tang}(e+r)} - 2\frac{g}{v}\cos e \frac{[(\sin^2 e + \sin^2 r)\cos\psi - \sin 2r \sin\psi]\operatorname{tang}(e-r)}{\sin(e+r)\cos(e-r)} \end{aligned}$$

Man übersieht leicht, dass dieselbe für $e = 0$, $e = p$ und $e = 90$ ihre Gültigkeit bewahrt.

Es verlieren daher die Fresnel-Canchy'schen Gleichungen für diesen zweiten Hauptfall ihre Geltung; sie sind dnrch ein von der Bewegung abhängiges Glied zu ergänzen, und dieses erlangt seinen Haupteinfluss für die Incidenz des Polarisationswinkels.

Während der unsymmetrische Bau der Coefficienten D ihre Vereinfachung unmöglich macht, gelangt man wieder zu kurzen und durchsichtigen Formeln, wenn man das Product DD_1 derselben bildet und so jene Dissymmetrie beseitigt.

Dieses Product ist bekanntlich der Schwächungscoefficient des Lichtes, welches nach zweimaliger Brechung durch eine planparallele Platte hindurchgegangen, und es ist dasselbe für den ersten Hauptfall bereits gebildet.

Bei der Herstellung desselben für den zweiten Hauptfall fällt das in Gleichung 40 vorkommende variable Brechungsverhältniss heraus, und es kommt:

$$D D_i = 1 + \frac{(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha_D\cos\alpha_D)\,(\sin\alpha_R\cos\alpha_R - \sin\alpha'_R\cos\alpha'_R)}{(\sin\alpha_R\cos\alpha_R - \sin\alpha_D\cos\alpha_D)\,(\sin\alpha'_R\cos\alpha'_R - \sin\alpha\cos\alpha)}$$

Die einzelnen zu bildenden Ausdrücke sind einfach, und wenn man zur Abkürzung setzt:

$$a = {}^1/_2\,(\sin 2e - \sin 2r), \quad b = {}^1/_2\,(\sin 2e + \sin 2r),$$

so erhält man:

$$D D_i = 1 - \frac{a^2 - a\,\dfrac{g}{v}\,\dfrac{\sin\psi}{\sin e}\left(\cos 2r \sin 2r - \cos 2e \sin 2e\right)}{b^2 + b\,\dfrac{g}{v}\,\dfrac{\sin\psi}{\sin e}\left(\cos 2r \sin 2r + \cos 2e \sin 2e\right)}$$

und als definitiven Ausdruck:

$$46.\quad DD_i = \frac{4\sin 2e\sin 2r}{(\sin 2e + \sin 2r)^2}\left[1 + \frac{g}{v}\,\frac{\sin\psi}{\sin e}\,\frac{\sin 2e - \sin 2r}{\sin 2e + \sin 2r}(\cos 2r - \cos 2e)\right]$$

Der mit $\frac{g}{v}$ behaftete Factor wird 0 für $e = 0$, für $e = p$ und für $e = 90^0$, und er verschwindet ausserdem für $\psi = 0$.

Die Beziehungen zwischen Amplitüde und Intensität sind bereits in unserer ersten Abhandlung andeutungsweise berührt worden. Sei:

$$\varrho = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\delta}{\lambda} - a\right)$$

das Schwingungsgesetz von Punkten, die continuirlich von Wellen von der Amplitüde A sollicitirt werden.

Dieselben pflanzen sich im ruhenden Aether und zwar in einer gegebenen längeren Zeit, die ich $= 1$ setze, so dass etwa:

$$m T = 1,$$

um eine Strecke $m\lambda$ fort. Heisst ihre Breite b und die Dichtigkeit des bezüglichen Aethers s, so war während dieser Zeit seitens der spontanen äusseren Kraft eine mechanische Arbeit aufzuwenden, die aequivalent ist der lebendigen Kraft:



$$\frac{1}{2} b . s \left(\frac{2\pi A}{T}\right)^2 \int_{\delta}^{\delta+m\lambda} \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\delta}{\lambda} - a\right) d\delta = \frac{1}{4} b s m \lambda \left(\frac{2\pi A}{T}\right)^2$$

$$= M \left(\frac{\pi A}{T}\right)^2,$$

wenn die bewegte Masse mit M bezeichnet wird.

Findet an den beiden Flächen einer ruhenden planparallelen Platte Spiegelung und Brechung statt, so bleibt T constant, und wenn der in der Zeiteinheit im Innern der Platte in Bewegung gesetzte Aether mit M_i bezeichnet wird, so hat man:

$$M = M R^2 + M_i D^2$$
$$M_i = M_i R_i^2 + M D_i^2.$$

Man erhält daraus, da noch speciell $R_i = - R$ gefunden wird:

$$(DD_i)^2 = (1 - R^2)^2.$$

Würden wirklich diese letzteren Beziehungen für den ersten Hauptfall der Translation (zufolge Gl. 44) ihre Gültigkeit bewahren, so liesse sich sagen, dass die lebendige Kraft der einfallenden Welle sich scheinbar in den gebildeten drei neuen Wellen wiederfindet.

Wollte man andererseits den Versuch machen, das ganze von mir durchgeführte Problem statt mittelst der Cauchy'schen Continuitätsbedingungen mittelst der Fresnel-Neumann'schen Gleichung der lebendigen Kräfte zu behandeln, so wären bei Aufstellung derselben die Modificationen der Schwingungsdauer zu beachten.

Was endlich die realisirbare Bestimmung der subjectiven Intensität betrifft, so misst sich dieselbe bekanntlich durch die Summe der lebendigen Kräfte, welche während einer längeren Zeit ($= 1 = m T$) auf die vor der Cornea liegenden Aethertheilchen eindringen. Ist daher das Schwingungsgesetz derselben:

$$\varrho = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - a\right),$$

so hat man, den constanten Factor $= 2$ gesetzt:

$$J = 2 \left(\frac{A}{T}\right)^2 \int_{t}^{t+mT} \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - a\right) dt = \left(\frac{A}{T}\right)^2.$$

Man hat nun zu unterscheiden, ob das einfallende Licht von einer festen Lichtquelle, beispielsweise einem Fixstern, herstammt, oder ob diese Lichtquelle als terrestrisch an der Bewegung von Platte und Auge Theil nimmt.

Im ersteren Fall hat der vor dem Auge liegende Aether, sofern er sich in relativer Ruhe befindet zu den auf der Vorderfläche der Platte befindlichen Incidenzpunkten, mit diesen die gleiche Schwingungsperiode. Für die Scheidewand gilt aber dem Doppler'schen Princip zufolge die Beziehung:

$$T_s = \left(1 + \frac{g}{v} \cos(\alpha - \psi)\right) T,$$

wofern unter T die Schwingungsdauer der festen Lichtquelle verstanden wird. Und daher werden die subjectiven Intensitäten für das an der Oberfläche gespiegelte, resp. das an der Hinterfläche austretende Licht:

$$J_R = \frac{R^2}{T^2}\left[1 - 2\,\frac{g}{v} \cos(e - \psi)\right],$$

$$J_D = \frac{(DD_1)^2}{T^2}\left[1 - 2\,\frac{g}{v} \cos(e - \psi)\right],$$

während die des einfallenden:

$$J_E = \frac{1}{T^2}\left[1 - 2\,\frac{g}{v} \cos(e - \psi)\right]$$

beträgt. — Ist dagegen das einfallende Licht terrestrisch, so erfolgt keine Veränderung der Farbe, und daher misst sich die subjective Intensität einfach durch das Quadrat der Quotienten $\frac{1}{T}$, $\frac{R}{T}$, $\frac{DD_1}{T}$.

In beiden Fällen schreibt sich also:

47. $$J_R = R^2 J_E, \quad J_D = (D D_1)^2 J_E.$$

Man kann den Einfluss der Erdbewegung für den zweiten Hauptfall dadurch steigern, dass man den gleichen einfallenden Strahl an mehreren aufgestellten Platten reflectiren, resp. durch sie hindurchgehen lässt. Da der zwei Mal gebrochene Strahl die ursprüngliche Richtnng wieder erhält, so verhält sich derselbe gegen jede folgende Platte gleich, und daher ist für m Platten:

48. $$J_D = (DD_1)^{2m} J_E.$$

Fällt dagegen der von der Vorderfläche der ersten Platte mit der Amplitüde:

$$R_1 = -\frac{tg(e-r)}{tg(e+r)}\left[1 + 2\frac{g}{v}\cos e\frac{(\sin^2 e + \sin^2 r)\cos\psi - \sin 2r\sin\psi}{\cos(e-r)\cos(e+r)}\right]$$

reflectirte Strahl auf eine zweite parallele, so bleibt zwar früheren Entwicklungen zufolge der scheinbare zweite Einfallswinkel dem scheinbaren ersten gleich, aber es geht für die zweite Reflexion g in $-g$ und ψ in $-\psi$ über. Es wird daher:

$$R_2 = -\frac{tg(e-r)}{tg(e+r)}\left[1 - 2\frac{g}{v}\cos e\frac{(\sin^2 e + \sin^2 r)\cos\psi + \sin 2r\sin\psi}{\cos(e-r)\cos(e+r)}\right],$$

und so kommt für die Amplitude $(R_1 R_2)$ des nach zweimaliger Spiegelung auf seine ursprüngliche Richtung zurückgebrachten Strahles:

49. $$R_1 R_2 = \frac{tg^2(e-r)}{tg^2(e+r)}\left[1 - 2\frac{g}{v}\frac{\sin\psi}{\sin e}\frac{\sin 2e\sin 2r}{\cos(e-r)\cos(e+r)}\right].$$

Der Gl. 48 entspricht daher für eine Reflexion an m Doppelflächen:

48b. $$J_R = (R_1 R_2)^{2m} J_E.$$

Vielleicht steht zu erwarten, dass es mittelst directen Sonnenlichtes und mit Anwendung eines hinlänglich empfindlichen Thermomultiplicators gelingen werde, die hier von der Theorie verlangten Intensitätsänderungen bei Drehung des Apparates zu constatiren.

Indess selbst dann, wenn die Thermoströme ihren Dienst versagen sollten, gibt es ein anderes Mittel, den Einfluss der Erdbewegung auf die besprochenen optischen Verhältnisse darzuthun, und zwar scheint die Anwendbarkeit desselben bereits von Fizeau praktisch bewiesen. Ich meine die Drehung der Polarisationsebene des gespiegelten und gebrochenen Lichtes für den Fall, dass die Polarisationsebene des einfallenden Strahles gegen die Einfallsebene beliebig geneigt ist.

Macht die Schwingungsebene dieses letzteren mit der Einfallsebene den Winkel φ, so zerlegt sich die Amplitude 1 der einfallenden Wellen senkrecht und parallel zur Einfallsebene in die Componenten

$$E_s = \sin\varphi,\quad E_p = \cos\varphi.$$

Demzufolge wird z. B.:

$$(D D_i)_s = \frac{\sin 2e\sin 2r}{\sin^2(e+r)}\sin\varphi$$

$$(D D_i)_p = \frac{4 \sin 2e \sin 2r}{(\sin 2e + \sin 2r)^2} \left[1 + \frac{g}{v} \frac{\sin\psi}{\sin e} \frac{\sin 2e - \sin 2r}{\sin 2e + \sin 2r} (\cos 2r - \cos 2e)\right] \cos\varphi,$$

und wenn daher das Azimuth des zweimal gebrochenen Strahles durch φ_D bezeichnet wird, so erhält man:

$$50. \qquad \operatorname{tang} \varphi_D = \cos^2(e-r) \left[1 - \frac{g}{v} \frac{\sin\psi}{\sin e} \frac{\sin 2e - \sin 2r}{\sin 2e + \sin 2r} (\cos 2r - \cos 2e)\right] \operatorname{tang} \varphi.$$

Heisst ebenso das Azimuth des einmal reflectirten Strahles $(\varphi_R)_1$, so folgt für dasselbe:

$$51. \qquad \cot(\varphi_R)_1 = \left\{\frac{\cos(e+r)}{\cos(e-r)} + 2\frac{g}{v} \frac{\cos e}{\cos^2(e-r)} [(\sin^2 e + \sin^2 r)\cos\psi - \sin 2r \sin\psi]\right\} \cot\varphi,$$

und analog bei zweimaliger Reflexion zufolge Gleichung 49:

$$52. \qquad \cot(\varphi_R)_2 = \frac{\cos^2(e+r)}{\cos^2(e-r)} \left[1 - 2\frac{g}{v} \frac{\sin\psi}{\sin e} \frac{\sin 2e \sin 2r}{\cos(e-r)\cos(e+r)}\right] \cot\varphi.$$

Auch hier lässt sich der Einfluss der Erdbewegung durch Anwendung mehrerer Platten steigern, und man übersieht leicht, dass das mit $\frac{g}{v}$ behaftete Glied der Gl. 50 und 52 für m Platten sich auf den m-fachen Werth erhebt.

Dieses Glied verschwindet für $e = 0$, $e = p$, $e = 90^0$ sowie für $\psi = 0$.

Für experimentelle Untersuchungen erscheint es wünschenswerth, von den Tangenten der Azimnthe zu den Incrementen derselben überzugehen. Macht man daher Gebrauch von der bekannten Formel:

$$\frac{\operatorname{tang}(\varphi' + \Delta\varphi) - \operatorname{tang}\varphi'}{1 + \operatorname{tang}^2\varphi'} = \Delta\varphi,$$

so erhält man z. B. für die Drehung, welche die Polarisationsebene des zweimal gebrochenen Strahles unter dem Einfluss der Erdbewegung erleidet:

$$\Delta \varphi_{\mathrm{p}} = -\frac{g}{v} \frac{(\sin 2e - \sin 2r) \sin 2(e-r)}{2[1 + \cos^4(e-r) \operatorname{tg}^2 \varphi] \sin e} \operatorname{tang} \varphi,$$

wenn insbesondere $\psi = 90^0$ gesetzt wird.

Fizeau*) benutzt zur Vergleichung der erhaltenen Resultate mit der Theorie den Ausdruck:

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = K \frac{\Delta n}{n},$$

wo $\Delta \varrho$ den durch die Erdbewegung hervorgerufenen Zuwachs der Drehung ϱ und K eine Constante bedeutet. Diese Formel, bei deren Aufstellung offenbar die ausserhalb der Platte vor sich gehenden Veränderungen vernachlässigt sind, wird dann mit Hülfe der nach Fresnel gebildeten Beziehung:

$$n + \Delta n = \frac{v}{v' + g k \cos(e-r)}$$

auf die Form gebracht:

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = K \frac{g}{v} \frac{n^2 - 1}{n} \cos(e-r).$$

Sie ist also eine roh empirische Formel, die denn auch wohl „die beträchtlichen Unterschiede, welche die aus den verschiedenen vervielfältigten Beobachtungen abgeleiteten Zahlenwerthe zeigen," zur Genüge erklärt.

Die Voraussetzungen der von uns erhaltenen Gleichungen sind die erweiterten Gränzbedingungen Cauchy's, welche Erweiterung in Zusatz H, abgesehen von der möglichen Drehung der Longitudinalstrahlen, auch noch nach ihrer inneren Berechtigung geprüft werden soll. Sollten dieselben von der Erfahrung ihre Bestätigung erhalten, so würde demnach ein senkrecht gegen die Einfallsebene schwingender Strahl sich gegen den Einfluss der Erdbewegung ganz anders verhalten wie ein der Einfallsebene parallel schwingender. Und es würde daraus weiter folgen, dass, entsprechend der Fresnel'schen Ansicht, das polarisirte Licht seine Schwingungen senkrecht und nicht parallel zur sogenannten Polarisationsebene ausführt.

Die nun folgende sechste und siebte Abhandlung soll den Aberrationsverhältnissen der anisotropen Mittel gewidmet sein.

*) Pogg. Annalen Bd. 114, S. 559.

ZUSATZ E.

Die Polarisationsversuche Fizeau's.

Aus der sehr umfangreichen, mit Recht berühmt gewordenen Arbeit Fizeau's [1]) gehe ich hier einen Auszug; ich benutze dabei denjenigen, den Fizeau [2]) selbst in den Comptes rendus veröffentlicht hat.

Die ersten Versuche hatten zum Zweck, den gebrochenen Strahl, der allein beobachtet werden sollte, von den übrigen an den Glasplatten reflectirten Strahlen zu isoliren. Sie führten dahin, folgende Anordnung als die zweckmässigste anzunehmen.

Die Glasplatten sind nicht parallelflächig, sondern schwach prismatisch (mit brechendem Winkel von 10′ bis 40′); sie sind rechteckig, 50mm lang, 17mm breit und 1—2mm dick. Die brechende Kante fällt mit einer der kurzen Seiten zusammen. Die Platten sind zu je vier in kleinen Kupferkasten, die mit Oeffnungen in den gegenüberstehenden Seiten versehen sind, zu Säulen vereinigt; jede Platte neigt — mittelst eingeschobener Kartenstücke — gegen die benachbarte nur um etwa 2°. Um den durchgehenden Strahl nicht aus seiner Richtung abzulenken, hatten drei der Gläser dieselben Winkel von 10′ in gleicher Richtung und das vierte einen Winkel von 40′ in entgegengesetzter. Ueberdies waren dieselben in ihrer Hülle sorgfältig vor Biegung und Torsion geschützt.

Wenn man durch eine solche Säule unter einem Winkel von etwa 60° nach einer entfernten Lichtflamme sieht, so er-

---

1) Ann. de chim. et de phys. 3me Série, t. 58, p. 129; Pogg. Ann. Bd. 114, S. 554.

2) Compt. rend. t. 49, p. 717; Pogg. Ann. Bd. 109, S. 160.

blickt man eine fast endlose Reihe von Bildern, theils vollvollkommen isolirt, theils zu Gruppen vereint, aber alle auf einer und derselben Geraden. Und wenn man die Säule um den Gesichtsstrahl dreht, sieht man alle Bilder sich im Kreise drehen, rings um ein centrales unbewegliches Bild, welches scharf und von den übrigen isolirt ist.

Solche und ähnliche, etwas verschiedene Plattencombinationen wurden zur Verstärkung hinter einander gebracht, und trotz der Vervielfältigung der Bilder blieb das mittlere rein und im allgemeinen gesondert.

Zur Aufstellung dieser Säulen sowie anderer cylindrischer Stücke von Fernrohrkörpern diente eine aus zwei Holzleisten gebildete, etwa 2m lange Rinne, welche, da alle Theile gleichen Durchmesser hatten, ein weiteres Centriren überflüssig machte.

Das Ganze ruhte horizontal auf einem hohen Fuss und konnte auf demselben leicht um eine verticale Axe gedreht werden. Die hauptsächlichsten Körper, die der eintretende Strahl zu durchlaufen hatte, sind folgende:

1. Ein polarisirendes Prisma mit kleinem Schirm mit kreisrunder oder rechteckiger Oeffnung von nur wenigen Millimetern. Es lässt sich in seiner Hülse drehen und seine Stellung an einem getheilten Kreise ablesen.

2. Etwa 50 Centimeter vom vorgenannten Schirm befindet sich eine Linse mit ebenso grosser Brennweite, welche die Strahlen parallel macht.

3. Eine Reihe von Glassäulen, die in verschiedene Azimuthe gestellt sind, welche letztere mittelst auf den Ringen angebrachter Theilungen bestimmt wurden.

4. Eine zweite Linse, von gleicher Brennweite mit der vorigen. Sie vereinigt die Strahlen zu einem Bilde von der Grösse der Schirmöffnung.

5. Ein analysirender Apparat, versehen mit einer angemessenen Ocularlinse; der ihn tragende Ring hat gleichfalls einen mit Zeiger versehenen getheilten Kreis. Als Zerleger wurden, je nach den Umständen angewandt: a) ein polarisirendes Prisma, welches durch Auslöschung wirkte. b) Ein solches Prisma verbunden mit dem Sénarmont'schen Fransen-

polariskop. c) Ein polarisirendes Prisma verbunden mit einem senkrecht gegen die Axe geschnittenen Quarz von Biot's empfindlicher Farbe, oder mit einem Soleil'schen Doppelquarz.

Der ganze Apparat bildet also eine Art horizontal liegendes Fernrohr, welches zur Zeit der Sonnenwenden, wo viele Versuche gemacht wurden, am Mittag in die Ost-West-Richtung gebracht und abwechselnd um 180° gedreht wurde. Um die doppelte Beobachtung bequem und rasch zu vollziehen, hatte man im Voraus zwei Spiegel, den einen im Osten und den andern im Westen, fest aufgestellt, und mittelst eines Heliostaten wurde je nach Bedürfniss bald der eine, bald der andere beleuchtet.

Fizeau hatte noch mit einer Reihe von Schwierigkeiten zu kämpfen, die zum Theil aus einer Dispersion der Polarisationsebenen der Farben und zum Theil aus einer elliptischen Polarisation des Bildes und anderen Wirkungen der Härtung des Glases entsprangen und einzeln compensirt werden mussten. Die erstere Störung wurde, je nach der Richtung und Grösse der Drehung, durch Einschaltung von Citronenöl oder von Gemischen von Citronen- und Terpentinöl aufgehoben. Bezüglich der zweiten erklärt Fizeau, dass die Schwierigkeiten, welche die Härtung der Gläser hervorrief, grösser seien als man bisher in ähnlichen Untersuchungen angetroffen. „Es wurde eine bedeutende Anzahl von Glasstücken verschiedener Herkunft und verschiedener Natur mit Sorgfalt untersucht, aber keins derselben ganz frei von Härtung befunden. Man versuchte diese Glasstücke auf verschiedene Weise auzulassen, allein es gelang nur, die Härtung zu verringern, nicht sie zu zerstören. Es wurden Gläser aus verschiedenen Hütten versucht, aber ohne vollständigeren Erfolg. Ungeachtet dieser Erfolglosigkeit ist es jedoch erlaubt zu hoffen, dass neue Versuche, mit Ausdauer angestellt, die Hebung dieser Schwierigkeit künftig gestatten werden."

Durch Anwendung von Compensationskunstgriffen und durch Benutzung der merkwürdigen Eigenschaft der Glassäulen, für gewisse Azimuthe die Veränderung der Drehung zu vergrössern, gelang es indess, mit noch unvollkommenen Gläsern

mehrere Säulen-Vorrichtungen herzustellen, mittelst deren befriedigende Versuche ausgeführt werden konnten. Fizeau schliesst seine Arbeit mit mehreren Tabellen, die ich ihres Interesses wegen sammt den beigegebenen Anmerkungen unverkürzt hier folgen lasse.

Ich bemerke nur noch, dass zur Zeit der Sonnenwende die horizontale Ost-West-Componente der Erdbewegung um $2^h\ 30^m$ nur $^4/_5$, und um 4^h nur $^1/_2$ ihres Werthes zur Mittagsstunde beträgt.

Die erste Tabelle bezieht sich auf:

Vorrichtung (A).

Tag	Zahl der Beobachtungen gegen		Drehungsüberschuss für die West-Richtung	Mittlere Stunde
	Ost	West		
Juni 2	11	18	33′ 0″	$4^h\ 0^m$ 1)
3	34	32	45	2 30
4	54	57	60	12
5	46	55	66	12
6	15	15	90	11 30
	15	15	20	1 45
	20	20	23	4
7	15	15	53	11 30
8	25	25	38	2 30
9	30	27	25	3 30
13	30	31	54	12
15	17	19	73	1
	20	22	8	4
16	12	13	89	11 45 2)
	12	15	75	2 15 2)
	21	18	61	4 2)
20	17	21	42	3
21	27	29	57	12 15 3)
	21	15	31	4
24	40	41	46	12 15
	20	22	— 7	4 4)

1) Berechneter Ueberschuss für Mittag der Sonnenwende 45′ bis 65′.

2) Bei diesen drei Reihen führte man absichtlich durch Neigen der Rotationsaxe einen constanten Fehler in den Apparat ein, um den Einfluss der Stunde unter anderen Bedingungen als die vorherigen zu beobachten.

3) Von dieser Reihe ab fügte man dem Apparat ein Hülfsfernrohr hinzu, um sich mittelst seiner der Identität der Richtung des Strahls in den beiden Lagen des Apparats zu versichern.

4) Umgekehrter Ueberschuss, d. h. für die Ost-Richtung.

Tag	Zahl der Beobachtungen gegen		Drehungsüberschuss für die West-Richtung	Mittlere Stunden	
	Ost	West			
Juni 27	10	10	53′ 30″	1h 30m	1)
	10	10	37	3	
	10	10	23 30	4	
28	11	12	60	12	
30	20	20	32	2 30	
Juli 1	26	23	53 30	12 45	
2	24	20	49	11 30	2)
	15	15	23 30	4	
3	25	15	39 0	11 15	
	15	15	19	4	
4	10	10	39	1	
	16	16	9 30	4	3)
5	10	20	56 30	1	
	10	10	26	3	
6	20	20	55 30	12 15	
	10	10	25	2 30	
	10	10	23 30	3 45	
7	10	15	47	2 30	
	10	14	30	4	
8	10	20	62	11 15	4)
	10	20	50	12 45	
	11	12	43	2 45	
	10	10	19	4	
9	8	8	55 30	10 45	5)
	10	10	59	12 30	
	10	10	43	2 45	
	10	10	26	4	
11	10	10	44	10 30	
	10	10	59	12 30	
	14	14	28	4	6)
12	19	10	59	1	
	10	10	27	4	

1) Von dieser Reihe ab wurde der Apparat durch zwei angekittete Glasröhren verstärkt, um Beugungen zu verhüten.

2) Es wurde dem Apparat ein Bleiloth hinzugefügt, um die Axe vertical zu halten und Beugungen zu verhüten.

3) Da einer der Spiegel (der im Osten) schadhaft zu sein schien, so wurde der andere in zwei Stücke zerschnitten, eins für Osten und das andere für Westen.

4) Verbesserung der Bilder durch eine Aenderung in der Richtung des Strahls und durch Zusatz eines Schirms.

5) Paarweise abwechselnde Beobachtungen, um den Einfluss der Temperaturveränderungen zu verringern.

6) Die Reihe um 4^h mit besonderer Sorgfalt angestellt.

Tag	Zahl der Beobachtungen gegen		Drehungsüberschuss für die West-Richtung	Mittlere Stunden
	Ost	West		
Juli 13	16	16	50′	12h 30m
	14	14	31	4
14	10	10	43	1 [1]
	10	10	42	2 [1]
	10	10	3	3 45 [1]
15	10	10	59	12 15

Der Abhandlung sind noch zwei kurze weitere Tabellen beigegeben, von denen die erstere die im September und Anfang October mit Vorrichtung (B) erhaltenen Ueberschüsse und die letzte die im October mit Vorrichtung (C) erhaltenen enthält. Da Vorrichtung (B) stark vergrösserte, so gehen die entsprechenden Ueberschüsse von 81 bis 155 Minuten.

Vorrichtung (B).

Sept. 18	11	13	81	3 0 [2]
20	14	18	139	2
24	16	16	128	1 15 [3]
October 5	10	10	120	1 30
6	8	4	155	2 45 [4]

Vorrichtung (C).

October 17	15	15	55	1 30 [5]
17	13	23	30	2 45
22	12	11	38	2 15 [5]
17	17	18	32	2 [6]
21	23	25	45	2 [7]

Die Resultate, die sich aus der Gesammtzahl dieser Beobachtungen (über 2000) unmittelbar ergeben, dürften nach Fizeau im wesentlichen folgende sein:

1) Am 14. kehrte man die Stellungen der Spiegel um; eine Säule war durch Wirkung der Wärme auf die Korke in ihrer Unterlage schlotternd geworden.

2) Berechneter Ueberschuss für Mittag der Sonnenwende 120′ bis 140′.

3) Spiegel des Heliostaten ersetzt durch ein total reflectirendes Prisma, Beobachtungen gemacht mit einem gelben Glase.

4) Dispersion der Farbenebenen compensirt durch eine Flasche mit Citronenöl.

5) Berechneter Ueberschuss für Mittag der Sonnenwende 50′ bis 60′.

6) Polarisationsazimuth in einer ungünstigen Lage.

7) Andere Lage des Polarisationsazimuths.

1) Die Drehungen der Polarisationsebene, erzeugt durch Glassäulen mit geneigten Platten, sind mitten am Tage beständig grösser, wenn der Apparat gegen Westen gerichtet ist, als wenn er gegen Osten gekehrt wird.

2) Der beobachtete Ueberschuss der Drehung scheint entschieden am Mittage, zur Zeit der Sonnenwende, ein Maximum zu sein. Vor und nach der Mittagsstunde ist er kleiner und um 4 Uhr wenig merklich.

3) Die aus den verschiedenen sehr vervielfältigten Beobachtungsreihen abgeleiteten Zahlenwerthe zeigen beträchtliche Unterschiede, deren Ursachen sich wohl vermuthen, aber noch nicht mit Sicherheit bestimmen lassen.

Sollte Fizeau die abgebrochene Untersuchung zur Zeit wieder aufnehmen wollen, so findet er nicht bloss die Theorie entwickelt vor, sondern es dürften sich dann auch bei den mittlerweile gemachten Fortschritten der optischen Technik die Schwierigkeiten beseitigen lassen, die aus der Härtung des Glases sowie aus der Vervielfältigung der Bilder hervorgehen, zumal wenn Platten von 10 bis 20^{mm} Dicke zur Anwendung kämen.

ZUSATZ F.

Verbreitung der Schall- und Lichtintensität im Raume bei Bewegung des Erschütterungscentrums und Beobachters. Aufnahme der Doppler'schen Theorie.

Bei der Ableitung des Ausdrucks für die subjective Intensität auf Seite 123 und ebenso bei der Seite 15 gegebenen Entwicklung des Doppler'schen Princips haben wir den Fall in's Auge gefasst, dass die Schall- oder Lichtwelle, die sich dem empfindenden Organe nähert, eine ebene ist oder wenigstens als solche betrachtet werden kann. Das trifft z. B. zu bei der Bewegung des Schalles in einem cylindrischen Rohre oder bei dem aus einem (ruhenden) Collimatorrohre austretenden Strahlenbündel, wenn dasselbe auf Unendlichkeit eingestellt ist. Da hier der Querschnitt aller Schichten, die successive den nämlichen Impuls empfangen, sich gleich bleibt, so behält derselbe auch die gleiche Stärke.

Anders, wenn dieser Querschnitt sich continuirlich ändert. Es sei:

$$\varrho = \Sigma A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - a\right)$$

das Schwingungsgesetz von Punkten, die auf einer mit irgendwelchem Radius um den Erschütterungsmittelpunkt beschriebenen Kugelschale liegen. Die Dicke derselben sei l. Denkt man sich den Gehörgang des Ohres oder die Pupillenöffnung, beide vom Querschnitt b, an dieselbe herangebracht, so liegt vor denselben ein Massenelement von Luft oder Aether von der Grösse: $\mu = b \cdot s \cdot l$. Dessen objective Intensität ist zugleich als Maass zu betrachten für die Stärke der subjectiven Empfindung, so dass sich also, zur Abkürzung: $\frac{d\varrho}{dt} = c$ gesetzt, für die einzelne Partialschwingung schreibt:

(a) $$J = \mu \int c^2 dt,$$

wo wieder die Integrationsgränzen um die Zeiteinheit aus einander liegen.

Dieser Ausdruck behält auch bei der Bewegung seine Gültigkeit, denn sofern man von den etwaigen Dichtigkeitsänderungen in Folge von Strömungen abstrahiren darf, bleibt s und darum μ constant.

Befindet sich nun zunächst ein ruhender Beobachter in der Entfernung δ vom ruhenden Erschütterungsmittelpunkt, und legt man durch denselben als Spitze einen Kegel von der Basis b, so schneidet derselbe aus einer gleich dicken Kugelschale vom Radius 1 ein Massenelement heraus, das die Grösse hat: $\mu_1 = \frac{\mu}{\delta^2}$. Nun verlangt das Gesetz der Erhaltung der Kraft, dass:

$$\int \mu_1 c_1{}^2 dt = \int \mu c^2 dt = \int \mu \frac{c_1^2}{\delta^2} dt,$$

oder:

(b) $$J = \mu \int \frac{c_1^2}{\delta^2} dt,$$

wenn nämlich c_1 und ebenso ϱ_1, A_1 die analoge Bedeutung haben wie c, ϱ, A. Da auch δ bezüglich der Integration constant bleibt, so lässt sich dasselbe heraussetzen, und so ersieht man, dass die subjective Intensität im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung abnimmt.

Bei Ausführung der Integration kommt:

(c) $$J = \mu \left(\frac{A_1}{T.\delta}\right)^2 = \mu \left(\frac{A}{T}\right)^2,$$

so dass: $A = \frac{A_1}{\delta}$, also die Amplitüde selbst im umgekehrten Verhältniss der Entfernung abnimmt.

Mit Rücksicht hierauf lässt sich Gleichung (a) auch auf die Form bringen:

(d) $$J = \mu \int \left[\frac{d \frac{A_1}{\delta} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - a\right)}{dt}\right]^2 dt.$$

Denkt man sich jetzt Wellencentrum und Beobachter in relativer Bewegung, so ist zuvörderst zu beachten, dass man

in den meisten Fällen — nur beim Schall nicht, wenn die Tonhöhe sehr niedrig ist, — einen nur kleinen Fehler begeht, wenn man die Entfernung zwischen beiden für die Dauer einiger weniger Schwingungen ($mT = 1$) als constant betrachtet oder vielmehr für dieselbe ihren Mittelwerth einführt. Alsdann lässt sich in Gleichung (b) der Factor $\frac{1}{\delta^2}$ vor das Integralzeichen setzen, und man gelangt wieder zur Integralgleichung (e), in der aber nunmehr unter T die modificirte Schwingungsdauer zu verstehen ist.

Doch wie dem auch sein möge, jede einzelne während der Zeit dt von der Wellenquelle ausgehende Erschütterung von der Form:

$$\varrho_0 = A_0 \sin 2\pi \frac{t'}{T}$$

erreicht die Kugel vom Radius 1 nach irgend einer Zeit mit der Oscillationsgeschwindigkeit:

$$c_1 = \frac{2\pi A_1}{T} \cos 2\pi \frac{t'}{T}$$

und ebenso nach irgend einer weitern Zeit die Kugel δ mit der Oscillationsgeschwindigkeit:

$$c = \frac{2\pi A}{T} \cos 2\pi \frac{t'}{T}.$$

Es besteht also für diese Geschwindigkeiten die Differentialgleichung:

$$c^2 dt = \frac{c_1^2}{\delta^2} dt$$

$$\text{d. h. } A = \frac{A_1}{\delta},$$

und die Gleichung (d) behält nach wie vor ihre Gültigkeit.

Unter der Grösse δ, die in allen diesen Formeln vorkommt, hat man selbstverständlich die Entfernung zu verstehen zwischen demjenigen Punkte des Raumes, den die Wellenquelle zur Zeit einer Erschütterung einnahm, und demjenigen, in dem der Beobachter von dieser nämlichen Erschütterung erreicht wird.

Noch auf Eins möge hier hingewiesen werden. Wenn die Amplitüde eines Stosses rings um das Centrum herum nach dem Gesetze einer Hyperbel $\left(A = \frac{A_1}{\delta}\right)$ abfällt, so geht

diese Aenderung anfangs rasch, später aber immer langsamer vor sich, und in einer gewissen endlichen Entfernung, die natürlich bei Schall und Licht verschieden ist, darf man die weiteren Aenderungen vernachlässigen, also die Amplitüde dann innerhalb eines gewissen Raumbereiches als constant betrachten.

Der Gleichung zufolge sollte für $\delta = 0$, also für das Centrum selbst, A unendlich gross werden. Da das unmöglich, da vielmehr die Quelle nicht als mathematischer, sondern als physischer Massen-Punkt Erschütterungen von bestimmter Amplitüde A_0 aussendet, so folgt, dass das vorausgesetzte Hyperbelgesetz selber nicht in aller Strenge richtig ist, sich aber um so mehr der Wahrheit nähert, je weiter man sich vom Centrum der Wellen entfernt. Denkt man sich jetzt mit Rücksicht hierauf die Einheit der Entfernung passend gewählt, so wird sich angenähert:

$$A = \frac{A_1}{\alpha + \delta}$$

schreiben lassen, wofern man nämlich unter α eine kleine Grösse versteht, die schon für $\delta = 1$ zu vernachlässigen ist. Es käme so für $\delta = 0$ $A = \frac{A_1}{\alpha} = A_0$, und allgemein:

$$A = \frac{A_0 A_1}{A_1 + A_0 \delta}, \tag{e}$$

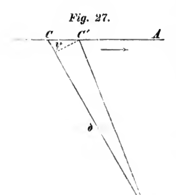
welcher Ausdruck dann auch statt $\frac{A_1}{\delta}$ in Gl. (d) eingesetzt werden darf.

Dies vorausgesetzt, wollen wir die Intensität des Schalles und Lichtes in mehreren wichtigen und leicht realisirbaren Fällen berechnen.

Das Erschütterungscentrum bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit g auf einer Geraden CA (Fig. 27), deren Punkt C sie zur Zeit $t = 0$ gerade passirt. Der Beobachter befinde sich im festen Punkte B in einer Entfernung $CB = D$, und diese Verbindungslinie mache mit CA den Winkel ψ.

Rückt die Quelle während der Zeit t_0 bis zum Punkte C' vor, so dass $CC' = gt_0$, so erhält man für die Entfernung $\delta = C'B$:

$$\delta^2 = D^2 + g^2 t_0^{\,2} - 2 D g t_0 \cos \psi. \tag{f}$$



Es erreiche nun der in diesem Augenblick von der Quelle ausgehende Stoss zur Zeit t den Ort des Beobachters, dann kommt demselben hier eine Excursion zu von der Grösse:

$$\varrho = \frac{A_1}{\delta} f\left(t - \frac{\delta}{v}\right),$$

wenn nämlich die Succession der Spontanschwingungen selber durch Gleichung:

$$\varrho = A_0 f(t)$$

gegeben ist. Die Zeiten t_0 und t sind mit einander verknüpft durch die Relation:

$$t_0 + \frac{\delta}{v} = t,$$

und setzt man den hieraus folgenden Werth von t_0 in Gleichung (f) und löst letztere als quadratische nach δ auf, so findet sich:

$$\delta = \frac{D \cos \psi - g t}{1 - \frac{g^2}{v^2}} \left(\frac{g}{v} + \sqrt{1 + \frac{\left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right) \sin^2 \psi}{\left(\cos \psi - \frac{g}{D} t\right)^2}} \right)$$

$$\text{(g)} \qquad \varrho = \frac{A_1}{\delta} f\left(t - \frac{\delta}{v}\right)$$

$$J = \mu \int \left(\frac{d \frac{A_1}{\delta} f\left(t - \frac{\delta}{v}\right)}{dt} \right)^2 dt.$$

Unter diesen allgemeinsten Fall subsummiren sich die folgenden Specialfälle.

I. Eine Ton- oder Lichtquelle bewege sich in der Richtung ihrer Verbindungslinie mit dem Orte des Beobachters. Alsdann ist $\psi = 0$, und die ersten beiden Gleichungen (g) reduciren sich, wenn noch $A = \frac{A_1}{\delta}$ durch Ausdruck (e) ersetzt wird, auf folgende:

$$\delta = \frac{D - gt}{1 - \frac{g}{v}}$$

$$\varrho = \frac{A_0 A_1 \left(1 - \frac{g}{v}\right)}{A_1 \left(1 - \frac{g}{v}\right) + A_0 (D - gt)} f \left(\frac{t - \frac{D}{v}}{1 - \frac{g}{v}}\right).$$

Es passirt also die Quelle den Ort des Beobachters mit der ihr eigenen Amplitüde A_0.

Nehmen wir dagegen an, die Quelle sende aus sehr grosser Entfernung ihre Strahlen in's Ohr oder Auge, und bestimmen wir die Intensität für den Augenblick $t = 0$, in dem dieselbe die Entfernung D hat. D ist dann gegen gt sehr gross, und wenn noch während der Zeiteinheit $\left(\text{von} - \frac{m' T'}{2} \text{ bis } + \frac{m' T'}{2}\right)$ für $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{D}\left(1 - \frac{g}{v}\right) + \frac{g}{D^2} t$ sein Mittelwerth:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{D}\left(1 - \frac{g}{v}\right)$$

genommen und die für den Beobachter modificirte Schwingungsdauer $T\left(1 - \frac{g}{v}\right)$ anstatt T (Schwingungsdauer der Quelle) eingesetzt wird, so kommt für die einzelne Partialschwingung gemäss Gl. (d) und (e):

$$J = \mu \left[\frac{A_1 \left(1 - \frac{g}{v}\right)}{D\,T\left(1 - \frac{g}{v}\right)}\right]^2 = \mu \left(\frac{A_1}{DT}\right)^2.$$

D i e I n t e n s i t ä t i s t a l s o d i e n ä m l i c h e , a l s w e n n d i e Q u e l l e f o r t w ä h r e n d i n d e r E n t f e r n u n g D v e r b l i e b e.

II. Dieselben Schlüsse lassen sich ziehen, wenn ψ nicht gleich Null, wenn also die Richtung des Strahles gegen die Bewegungsrichtung der Quelle geneigt ist.

Was zunächst die Schwingungsdauer am Orte des Beobachters betrifft, so lässt sich dieselbe ausser in der früheren Weise (S. 93) mit mehr Strenge ableiten wie folgt:

Zur Zeit t erhält offenbar der Beobachter den Schwingungsausschlag:

$$\varrho = \frac{A_1}{\delta} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\delta}{v}\right),$$

und wenn wir die gesuchte Schwingungsdauer mit T' bezeichnen und den periodischen Theil des Ausschlages von der

Zeit $t = t_1$ bis $t = t_1 + T'$ ins Auge fassen, dann wird derselbe in diesem letzteren Augenblick gleich:

$$\sin \frac{2\pi}{T}\left(t + T' - \frac{\delta}{v} - \frac{1}{v}\frac{d\delta}{dt}T'\right).$$

Sind aber zu beiden Zeiten die periodischen Theile der Ausschläge gleich, so folgt:

$$\frac{2\pi}{T}\left(t + T' - \frac{\delta}{v} - \frac{1}{v}\frac{d\delta}{dt}T'\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\delta}{v}\right) + 2\pi$$

Oder:

$$T'\left(1 - \frac{1}{v}\frac{d\delta}{dt}\right) = T.$$

Man erhält so:

$$T'\left[1 + \frac{g}{v}\left\{\frac{1}{1 - \frac{g^2}{v^2}}\left(\frac{g}{v} + \sqrt{1 + \frac{\left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)\sin^2\psi}{\left(\cos\psi - \frac{g}{D}t\right)^2}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sin^2\psi}{\left(\cos\psi - \frac{g}{D}t\right)^2\sqrt{1 + \frac{\left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)\sin^2\psi}{\left(\cos\psi - \frac{g}{D}t\right)^2}}}\right\}\right] = T.$$

Vernachlässigt man die zweiten Potenzen von $\frac{g}{v}$, und bestimmt T' für $t = 0$, so schreibt sich einfacher:

$$T'\left[1 + \frac{g}{v}\left(\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\psi} - \frac{\operatorname{tang}^2\psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\psi}}\right)\right] = T$$

oder:

$$T' = T\left(1 - \frac{g}{v}\cos\psi\right).^{*})$$

---

*) Handelt es sich bloss um die angenäherte Bestimmung der modificirten Schwingungsdauer, so empfiehlt sich folgendes abgekürzte Verfahren. Es sei im Punkte B der Schwingungsausschlag:

$$\varrho = \frac{A_1}{BC}\varphi(t) = \frac{A_1}{BC}f\left(t - \frac{BC}{v}\right).$$

Alsdann ist für die Zeit $t + \varDelta t$:

$$\varrho + \varDelta\varrho = \frac{A_1}{BC'}\varphi(t + \varDelta t) = \frac{A_1}{BC'}f\left(t + \varDelta t - \frac{BC'}{v}\right).$$

Nimmt man die Amplitüde während der kleinen Zeit $\varDelta t$ als ungeändert an, so kommt:

$$\varDelta\varrho = \frac{A_1}{\delta}\left[\varphi(t + \varDelta t) - \varphi(t)\right] = \frac{A_1}{\delta}\left[f\left(t + \varDelta t - \frac{BC'}{v}\right) - f\left(t - \frac{BC}{v}\right)\right].$$

Nun ist aber nahezu:

Führt man die gleiche Vernachlässigung ein in den Ausdruck für δ (Gleichung g) und behandelt bei der Entwicklung $\frac{g}{D}$ als eine Grösse von der Ordnung $\frac{g}{v}$, so erhält man:

$$BC - BC' = CC' \cos\psi$$

und entsprechend den obigen Bezeichnungen:

$$t_0 + \frac{BC}{v} = t, \qquad t_0 + \frac{CC'}{g} + \frac{BC'}{v} = t + \varDelta t.$$

So leitet sich ab:

$$\frac{BC - BC'}{v} = \frac{g \cos\psi}{v - g\cos\psi}\varDelta t, \qquad \varDelta t - \frac{BC'}{v} = \frac{\varDelta t}{1 - \frac{g}{v}\cos\psi} - \frac{BC}{v}.$$

Folglich:

$$\varDelta\varrho = \frac{A_1}{\delta}\frac{d\varphi\, t)}{dt}\varDelta t = \frac{A_1}{\delta}\left[f\left(t + \varDelta t\left(1 + \frac{g}{v}\cos\psi\right) - \frac{\delta}{v}\right) - f\left(t - \frac{\delta}{r}\right)\right]$$

$$= \frac{A_1}{\delta}\left\{f\left(t + \varDelta t + \frac{g}{v}\cos\psi\,\varDelta t - \frac{\delta}{v}\right) - f\left(t + \varDelta t - \frac{\delta}{v}\right)\right.$$

$$\left. + f\left(t + \varDelta t - \frac{\delta}{v}\right) - f\left(t - \frac{\delta}{v}\right)\right\}$$

$$= \frac{A_1}{\delta}\left\{\frac{g}{v}\cos\psi\,\frac{df\left(t + \varDelta t - \frac{\delta}{v}\right)}{dt} + \frac{df\left(t - \frac{\delta}{v}\right)}{dt}\right\}\varDelta t.$$

Und wenn die höheren Potenzen von $\varDelta t$ vernachlässigt werden:

$$c = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{A_1}{\delta}\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{A_1}{\delta\left(1 - \frac{g}{v}\cos\psi\right)}\,\frac{df\left(t - \frac{\delta}{v}\right)}{dt}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich dann in analoger Weise sofort die folgende:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{A_1}{\delta}\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \frac{A_1}{\delta\left(1 - \frac{g}{v}\cos\psi\right)^2}\,\frac{d^2 f\left(t - \frac{\delta}{v}\right)}{dt^2}.$$

Ist nun die Function $f(t)$ nach T periodisch, dann ist:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 f(t),$$

folglich:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\frac{(2\pi)^2}{T^2\left(1 - \frac{g}{v}\cos\psi\right)^2}\varphi(t).$$

Und so erhält man als Integralgleichung:

$$\varrho = c.f\left(\frac{vt - x}{v - g\cos\psi}\right),$$

welche Form identisch ist mit Gl. 29 auf S. 93.

$$t - \frac{\delta}{v} = \frac{t - \frac{D}{v}}{1 - \frac{g}{v}\cos\psi}, \quad \delta = \frac{D - gt}{1 - \frac{g}{v}\cos\psi}$$

und darum, wenn bei der Intensitätsbestimmung (für $t = 0$) für $\frac{1}{\delta}$ sein mittlerer Werth eingeführt wird:

$$\text{(h)} \qquad J = \mu \left[\frac{A_1 \left(1 - \frac{g}{v}\cos\psi\right)}{DT\left(1 - \frac{g}{v}\cos\psi\right)} \right]^2 = \mu \left(\frac{A_1}{DT}\right)^2.$$

Wie also auch immer die Bewegung der Fixsterne beschaffen sein möge, die Intensität des in einer bestimmten Entfernung von ihnen wahrgenommenen Lichtes bleibt an einem im Raume als fest angenommenen Punkte die nämliche, als ob der Fixstern in der bezüglichen Entfernung in Ruhe wäre.

III. Eine terrestrische Lichtquelle befinde sich in einem festen Abstande D vom Orte des Beobachters, und die Verbindungslinie beider mache mit der Bewegungsrichtung der Erde den Winkel ψ.

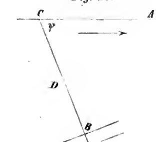
Alsdann ist das Schwingungsgesetz an letzterem Orte:

$$\varrho = \frac{A_1}{\delta} f\left(t - \frac{\delta}{v}\right),$$

und es ist δ diejenige Entfernung, die jeder Lichtstoss vom Moment seiner Entstehung bis zu seinem wirklichen Eintreffen in dem augenblicklichen Standorte zu durchlaufen hat. Man hat daher Fig. 28:

$$BB' : CB' = g\cos\psi : v, \quad CB' - BB' = D$$

Fig. 28.



und sonach nahezu:

$$\delta = CB' = D\left(1 + \frac{g}{v}\cos\psi\right).$$

Sofern δ eine Constante ist, so bleibt die Schwingungsdauer ungeändert. Und so kommt für die Intensität:

$$\text{(i)} \quad J = \mu \left[\frac{A_1 \left(1 - \frac{g}{v}\cos\psi\right)}{DT} \right]^2.$$

Dieselbe wird also durch die Bewegung modificirt.

Vergleicht man den in Rede stehenden Fall mit dem vorhergehenden, so sieht man sofort, dass es die beiden möglichen Extreme sind. Während oben die relative Bewegung mit der absoluten als identisch zusammenfällt, ist hier bei gleicher absoluter die relative Bewegung gleich Null. Es ist nun leicht, die erhaltenen Ausdrücke (h) und (i) so zu verallgemeinern, dass sie sich auf jede beliebige relative Bewegung zwischen Wellencentrum und Beobachter anwenden lassen.

Ist zur Zeit t, d. h. für den Augenblick, für den die Intensität bestimmt werden soll, die wirkliche Entfernung beider gleich D, dann hat die Wellenbewegung nach wie vor nahezu die Strecke:

$$\delta = D\left(1 + \frac{g_1}{v} \cos \psi_1\right)$$

zu durchlaufen, unter g_1 nunmehr die absolute Geschwindigkeit des Erschütterungscentrums verstanden, dessen Bewegungsrichtung mit D den Winkel ψ_1 bildet.

Andererseits ist die Schwingungsdauer durch die relative Geschwindigkeit zwischen jenem und dem Beobachter bedingt, und nennen wir dieselbe g', die absolute Geschwindigkeit des Beobachters g_2, und macht die Bewegungsrichtung desselben mit D den Winkel ψ_2, so ist:

$$g' = g_1 \cos \psi_1 - g_2 \cos \psi_2.$$

Folglich:

$$T' = T\left[1 - \frac{1}{v}(g_1 \cos \psi_1 - g_2 \cos \psi_2)\right]$$

und schliesslich:

$$\text{(k)} \qquad J = \mu\left[\frac{A_1\left(1 - \frac{g_2}{v} \cos \psi_2\right)}{DT}\right]^2.$$

Wie also auch immer die relative Bewegung zwischen Fixsternen und Erde beschaffen sein möge, die Intensität des in einem bestimmten Abstande von ihnen wahrgenommenen Lichtes ist ausser von diesem nur noch abhängig von der absoluten Bewegung der Erde.

Die letzterhaltene Formel fällt mit der für irdisches Licht gewonnenen zusammen; ebenso gilt sie für den Schall, sofern nur die Verhältnisse so bemessen werden, dass während der Zeit von m Schwingungen, auf die sich die Integration ausdehnt, die Amplitüde als genügend constant betrachtet werden darf. Eine Bedingung, die selbstverständlich bei gleichzeitiger Bewegung von Tonquelle und Beobachter stets erfüllt ist.

Wollte man versuchen, die Formel auf optisch-thermischem Wege zu prüfen, so empfiehlt sich vielleicht die Ausführung eines im Jahre 1852 von **Fizeau***) vorgeschlagenen Versuches.

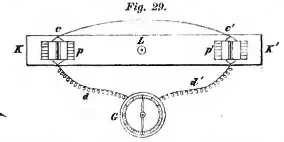
Denkt man sich auf der Erdoberfläche einen Lichtpunkt im Centrum einer Hohlkugel, so werden dem Bisherigen zufolge die Punkte dieser Kugel nicht alle gleich beleuchtet werden. Derjenige Durchmesser, welcher der Richtung der Translation parallel ist, hat zwei Punkte, für welche die Intensität resp. gleich ist:

$$J_0 \left(1 \pm 2 \frac{g}{v}\right) = J_0 \left(1 \pm {}^1/_{5000}\right),$$

von denen also der eine $^1/_{5000}$ mehr und der andere $^1/_{5000}$ weniger Licht empfängt als im Zustand der Ruhe. Der Intensitätsunterschied beider Punkte wird also $^1/_{2500}$ betragen.

Um diesen Unterschied zu beobachten, nimmt **Fizeau** an, es seien zwei thermoelektrische Säulen p, p' (Fig. 29) in

Fig. 29.



gleichem Abstand von einer Lampe L auf einem Stativ KK' aufgestellt, welches sich um eine durch den Punkt L gehende

*) Cosmos t. I, p. 690; Pogg. Ann. Bd. 92, S. 652.

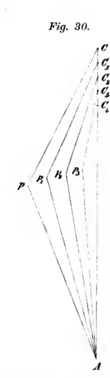
senkrechte Axe drehen lässt. Ein Leiter cc' verbinde die gleichnamigen Pole beider Säulen, und zwei Leiter dd' setzen die beiden anderen Pole in Verbindung mit den Enden des Drahtes eines Galvanometers G. Letzteres stehe auf einem unbeweglichen, von KK' unabhängigen Gestelle.

Da die beiden Säulen mit entgegengesetzten Polen verbunden sind, so wird, wenn sie gleiche Kräfte besitzen, kein Strom entstehen, so lange die Intensität der Strahlung auf die beiden Flächen gleich ist. Sowie aber diese Gleichheit aufhört, wird die Nadel ausschlagen, und der Sinn des Ausschlages wird erkennen lassen, auf welche der Säulen die Strahlung die intensivere sei. Die Rotation des Apparates um 180° wird die Stromesrichtung umkehren und sonach den totalen Intensitätsunterschied auf $^1/_{1250}$ erheben.

Fizeau verkennt keineswegs die Schwierigkeiten, die sich der Ausführung dieses Versuches entgegenstellen würden, er hält ihn aber nichtsdestoweniger für ausführbar. Ob und mit welchem Erfolg derselbe vielleicht bereits angestellt worden, darüber ist nichts bekannt geworden.

Die bisherigen Entwicklungen haben nun meines Erachtens in möglichst einfacher und anschaulicher Weise die Richtigkeit des Doppler'schen Princips dargethan. Wir haben uns dabei an die sogenannten directen Strahlen gehalten, d. h. angenommen, dass die Uebertragung der undulatorischen Bewegung längs eines Strahles wesentlich nur vom vorhergehenden Theilchen auf das nachfolgende erfolge. Diese Betrachtung ist bekanntlich keine so naturgemässe wie die von Huyghens, welche zugleich auf die Solidarität der Schwingungen aller Theilchen eines elastischen Mittels Rücksicht nimmt.

Wollte man z. B. die Erscheinungen der Fresnel'schen oder sogenannten convergenten Diffraction bei Bewegung von Lichtquelle oder Auge untersuchen, so wären die obigen Erörterungen folgendermassen zu ergänzen. Es sei C (Fig. 30) die Lage der Lichtquelle in irgend einem Augenblick, A die feste Lage des Auges, also CA die Richtung eines directen Strahles und der Einfachheit wegen zugleich die Bewegungsrichtung der Quelle. Zur Zeit t gelange von C her auf dem



Wege Cpa ein Elementarstrahl in's Ange nnd bewirke in demselben einen gewissen partiellen Ausschlag. Bewegt sich dann während der Zeit $\frac{CpA}{v}$ die Qnelle bis zu einem Punkte $C_1 \ldots$ und sendet von da ab auf dem Wege $C_1\, p_1\, A \ldots$ andere Elementarstrahlen aus, so werden dieselben alle im gleichen Angenblicke am Auge eintreffen, sobald die in der ersteren Verticalreihe ansgesprochene Bedingungsgleichnng erfüllt ist:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{CpA}{v} & f\left(t-\frac{CpA}{v}\right) \\
=\frac{C_1p_1A}{v}+\frac{CC_1}{g} & f\left(t-\frac{C_1p_1A}{v}\right) \\
=\frac{C_2p_2A}{v}+\frac{CC_2}{g} & f\left(t-\frac{C_2p_2A}{v}\right) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
=\frac{C_4A}{v}+\frac{CC_4}{g} & f\left(t-\frac{C_4A}{v}\right)
\end{array}
$$

Die in A anlangenden partiellen oder Elementar-Ansschläge sind abgesehen von ihrer Amplitüde in der zweiten Verticalreihe enthalten. Dabei darf man znm geometrischen Ort der Pnnkte p jede beliebige Fläche, also etwa eine mit Ap um A beschriebene Kugel wählen. Bei dieser Auffassung erscheint der wirkliche Schwingungsausschlag in A als eine Summe oder vielmehr als Integral unendlich vieler Partialausschläge. Und es ist klar, dass bei Zwischenschieben eines mit irgend welchen Oeffnungen versehenen Schirmes die resultirende Intensität sich ändert.

So lange nun bei ruhender Quelle — nnd das ist der Fall bei ungehinderter seitlicher Ansbreitung des Lichtes — die ausschliessliche Berücksichtigung der directen Strahlen genügt, so lange ist diese Beschränkung auch bei bewegter Quelle gestattet. Dann tritt aber an Stelle des Interferenzprincips ausschliesslich das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Schon vor den Einwendungen Klinkerfues's gab das Doppler'sche Princip Anlass zu einer lebhaft geführten Controverse zwischen Doppler selbst und Petzval. Letzterer hatte nämlich in einem vor der Wiener Akademie gehaltenen Vortrage [1]) ein Gesetz begründet, das er unter dem Namen des Princips der Erhaltung der Schwingungsdauer einführte. Dasselbe schien ihm mit Doppler's Satz in Widerspruch zu stehen, und diesen Widerspruch suchte er in einem zweiten Vortrag [2]) weiter zu begründen. Derselbe rief indess eine Entgegnung hervor seitens Doppler [3]), auf dessen Seite sich auch v. Ettingshausen [4]) stellte, und das gab Petzval wiederum Stoff zu einem dritten Vortrag [5]).

Da die erste Arbeit Petzval's, die sich mit den von einem schwingenden Körper erregten Oscillationsbewegungen eines Mittels für den Fall beschäftigt, dass in demselben Strömungen Statt finden, mit Doppler's Princip nur missverständlich in Widerspruch gebracht wurde und Doppler selbst die Richtigkeit der mathematischen Deductionen zugab, so kann dieselbe hier übergangen werden. v. Ettingshausen begnügte sich, ihr gegenüber hervorzuheben, dass sich Petzval's Formeln ihrer Entstehung nach nur auf einen momentanen anfänglichen Erregungszustand beziehen, und dass man, um auf die wirklichen Erscheinungen zu kommen, auf die continuirlich auf einander folgenden Erregungszustände Rücksicht nehmen und aus deren Einzelwirkungen die Gesammtwirkung herleiten müsse. Geschähe das aber, so komme man auf dasselbe Resultat, welches Doppler durch einfache Ueberlegung gewonnen habe.

Petzval nahm daraufhin Veranlassung, eine schon früher von ihm angedeutete Rechnung durchzuführen und zu zeigen, dass das Ergebniss keineswegs, wie v. Ettingshausen behaupte, mit Doppler's Satz in Uebereinstimmung sei. Die

1) Wien. Berichte VIII, 134.
2) Ebend. VIII, 567.
3) Ebend. IX. 217.
4) Ebend. VIII, 593; IX, 27.
5) Ebend. IX, 699.

Rechnung bezieht sich zunächst auf den Schall, und zwar insbesondere auf die beiden Fälle, dass der tönende Körper eine Ebene oder kugelförmig sei.

Für den ersteren Fall geht Petzval aus von der allgemeinen Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\xi}{dx^2},$$

als deren allgemeines Integral die Gleichung:

$$\xi = f(x - vt) + F(x + vt)$$

hingestellt wird. Er setzt dann eine Reihe von sehr kleinen Erregungen des Mediums voraus, welche das Gesetz $\sin \frac{2\pi}{T}\vartheta . d\vartheta$ befolgen, unter ϑ die Zeit verstanden. So ergibt sich ihm für den Ort x und die Zeit t die aus den his dahin fortgepflanzten Elementarwellen resultirende Erschütterung:

$$\xi = \int_0^t f\left\{x - g\vartheta - v(t - \vartheta)\right\} \sin \frac{2\pi}{T}\vartheta . d\vartheta$$

$$+ \int_0^t F\left\{x - g\vartheta + v(t - \vartheta)\right\} \sin \frac{2\pi}{T}\vartheta . d\vartheta.$$

Und daraus erhält er durch Ausführung der Integration:

$$\xi = \frac{A}{v-g} \sin \frac{2\pi}{T} \frac{vt - x}{v - g} + \frac{B}{v+g} \sin \frac{2\pi}{T} \frac{vt + x}{v + g},$$

eine Gleichung, die unter der gemachten Voraussetzung, dass der tönende Körper eine Ebene ist, der Schall sich also in einem cylindrischen Rohre fortpflanzt, der Wirklichkeit offenbar widerstreitet. Mach*) nennt diese Petzval'sche Ableitung eine viel schönere, vollständigere und strengere als die Doppler'sche. Mir dagegen scheint eher das Gegentheil richtig und die Formel selbst eine willkürliche Metamorphose der obigen allgemeinen Integralgleichung. Wäre sie wirklich der genaue Ausdruck der Doppler'schen Theorie, so hätte Klinkerfues Recht, wenn er diese letztere darum verwirft, weil sie seiner Meinung nach für denjenigen Punkt des

*) Zeitschrift für Mathematik. Jahrg. 1861. S. 125.

Mittels, der gerade von der bewegten Quelle passirt wird, eine andere Elongation verlangt, als diese in dem betreffenden Augenblick selber besitzt. — Ueber die Bedeutung und Anwendbarkeit des Interferenzprincips, das offenbar der Rechnung Petzval's zu Grunde liegt, ist bereits oben das Nöthige bemerkt.

Petzval selbst hält seine Formel für unstatthaft, aber nicht desshalb, weil sie unter Voraussetzung der Unbeweglichkeit des Mittels unrichtig entwickelt wäre, sondern weil er gerade diese Voraussetzung unter keinerlei Bedingung acceptiren will.

Eines Einwurfes von Ångström ist schon oben (S. 28) gedacht worden.

Doppler hat noch mittelst kühner Hypothesen aus seinem Princip sehr weitgehende Folgerungen gezogen bezüglich der Farben sämmtlicher Sterne. Sestini, Mach und Andere sind ihm darin theilweise gefolgt, aber die Unhaltbarkeit dieser Speculationen wurde schon bald darauf von Mädler überzeugend nachgewiesen.

Abhandlung VI.

(Vergl. Poggendorff's Annalen Bd. CXLVII, S. 404—429.)

Die Aberration des Lichtes in den anisotropen Mitteln; Erweiterung der Fresnel'schen Formel.

Die theoretischen Betrachtungen der letzten Abhandlung legen es nahe, unsere Untersuchung auf das Verhalten der anisotropen Mittel anszudehnen. Ich werde mich auf optisch einaxige Krystalle beschränken und auf den Fall,. dass die Lichtverbreitung im sogenannten Hauptschnitt vor sich geht, in den zugleich auch die Richtung der Bewegnng hineinfallen möge.

Wirkliche Versuche sind meines Wissens bis dahin niemals ausgeführt, wohl aber liegt ein Vorschlag vor von Sellmeier*), der durch die Vermittelung Humboldt's in Moigno's Cosmos aufgenommen wurde, und auf den zuerst Prof. Poggendorff mich frenndlichst aufmerksam machte. Ich komme weiterhin auf ihn zurück.

Denken wir uns an den Krystall eine ebene Fläche geschliffen und durch die Normale derselben nnd die optische Axe eine Ebene hindurchgelegt. Dieselbe sei die Einfallsebene eines auffallenden polarisirten Strahles und sonach ein Hauptschnitt des Krystalles. Steht nun die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes auf dieser Eiufallsebene senkrecht (I. Hauptfall), so erfährt die in den Krystall eindringende Welle die ordinäre Brechnng, ist dagegen die Schwingungs-

*) Cosmos, t. I, p. 672.

ebene dem Hauptschnitt parallel (II. Hauptfall), so wird das eindringende Licht extraordinär gebrochen.

Es seien ferner $n_2 = \frac{v}{\omega_2}$, $n_1 = \frac{v}{\omega_1}$ die Hauptbrechungsindices des Krystalles und zwar ersterer für die der Axe paralle, letzterer für die zur Axe senkrechte Richtung. Man hat dann für die Geschwindigkeit einer aussergewöhnlichen Welle, deren Normale mit der optischen Axe den Winkel χ bildet:

53. $$\omega^2 = \omega^2_1 \sin^2 \chi + \omega^2_2 \cos^2 \chi \text{*)}$$

und demzufolge für den zugehörigen Brechungsindex:

53_b. $$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2 \chi}{n^2_1} + \frac{\cos^2 \chi}{n^2_2}.$$

Dies vorausgesetzt, lassen sich die Amplitüden R und D des gespiegelten und gebrochenen Lichtes nach dem Cauchy'schen Verfahren berechnen, wo man dann bei Behandlung des I. Hauptfalles die Geschwindigkeit der gebrochenen Welle gleich $\omega_2 = \frac{v}{n_2}$, beim II. Hauptfall dagegen gleich dem variablen Werthe $\omega = \frac{v}{n}$ zu setzen hat.

Beschränkt man sich auf senkrechte Incidenz, so ergibt sich für den I. Hauptfall, bei dem nur der ordinäre Strahl zu Stande kommt:

$$R_s = -\frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)} = -\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}.$$

Und für den II. Hauptfall, bei dem nur die extraordinäre Welle sich bildet:

$$R_p = -\frac{\operatorname{tang}(e-r)}{\operatorname{tang}(e+r)} = -\frac{n-1}{n+1},$$

wenn nämlich das Einfallsloth als Wellennormale mit der Axe den Winkel χ bildet.

Liegt insbesondere die Richtung der Axe der Scheidewand parallel, so erlangt R_p den zweiten Hauptwerth:

$$R_p = -\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}.$$

Die genannten Beziehungen sind natürlich der gleichen Erweiternng fähig wie die entsprechenden Formeln der isotropen Mittel.

*) Bezüglich der Ableitung dieser Gleichung s. Abh. VIII.

Ich mache vorläufig die Annahme, dass sich ein bewegter Krystall für eine unendlich kurze Zeit ganz ebenso verhalte, als ob er ruhte. Aus dieser Unterstellung leiten sich dann mittelst der nämlichen Schlussfolgerungen wie S. 116 die Relationen ab:

$$\omega' = \omega + g\,k \cos\varphi$$

54. $$k = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Und wenn für $\frac{1}{n^2}$ sein aus Gl. 53 folgender Werth eingesetzt wird, so erhält man:

55. $$k = \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2} \sin^2 \chi + \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2} \cos^2 \chi.$$

Unter der genannten Annahme also würden die von Fresnel für isotrope Medien aufgestellten Ausdrücke auch für die anisotropen ihre Gültigkeit bewahren.

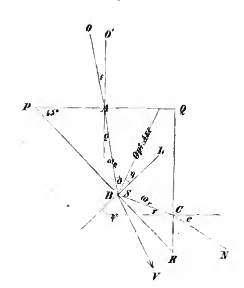
Ebenso würden die Gesetze der Spiegelung und Brechung für bewegte doppelbrechende Mittel denen für einfachbrechende analog sein, mit dem Unterschiede jedoch, dass die in Folge der Bewegung irgendwie gedrehte Welle auf ihrer neuen Normalen eine veränderte Elasticität und Dichtigkeit antrifft, und dass daher zu den früher betrachteten Variationen noch eine neue hinzutritt, die zugleich eine Function ist von der Stärke und Richtung der Bewegung und von dem Doppelbrechungsvermögen des Mittels. Jene ersteren heben sich — immer die strenge Richtigkeit der obigen Hypothese vorausgesetzt — in ihrer Gesammtwirkung auf, und so bleibt nur diese letztere übrig. Dieselbe lässt sich dann durch passende Combinationen beliebig verstärken.

Ich bespreche zunächst die Anwendung von Reflexionsprismen.

Sei (Fig. 31) PQR der Hauptschnitt eines der Einfachheit wegen als rechtwinklig und gleichschenklig angenommenen Prisma, der zugleich die optische Axe enthalte.

Auf die Vorderfläche desselben falle unter dem scheinbaren Incidenzwinkel 0 eine ebene Welle. Heisst der wirkliche Einfallswinkel ϵ, so besteht zwischen diesem und dem

Fig. 31.



Brechungswinkel ϱ der extraordinären Welle nahezu die Beziehung:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{v}{\omega_\varrho} = n,$$

unter ω_ϱ die der Richtung ϱ entsprechende Geschwindigkeit des Ruhezustandes verstanden.

Bezeichnet man wie früher (S. 59) den Winkel ABL mit σ, den Spiegelungswinkel LBC mit $s = \sigma + \varDelta\sigma$, so erhält das Reflexionsgesetz die Form:

$$56. \qquad \frac{\sin\sigma}{\sin s} = \frac{\omega_\varrho - g\,(1 - k_\varrho)\cos(\sigma - \psi)}{\omega_r + g\,(1 - k_r)\cos(\sigma + \psi)},$$

und für den schliesslichen Austrittswinkel hat man:

$$\frac{e}{r} = \frac{v}{\omega_r};$$

k_ϱ wie ω_ϱ beziehen sich auf die Richtung ϱ, k_r und ω_r auf die Richtung r.

Macht noch die optische Axe mit dem Einfallsloth der spiegelnden Fläche den Winkel η, so ist:

$$\omega_\varrho^2 = \omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2)\cos^2(\sigma - \eta)$$
$$\omega_r^2 = \omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2)\cos^2(\sigma + \varDelta\sigma + \eta).$$

Man leitet daraus ab:

$$\omega_r^2 = \omega_\varrho^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)\,[\sin 2\sigma \sin 2\eta + \sin 2(\sigma + \eta)\,\varDelta\sigma],$$

und es erhellt, dass der Einfluss der durch die Bewegung erzeugten Drehung um $\varDelta\sigma$ am kräftigsten hervortritt, wenn man η entweder $= 0$ oder $= 90^0$ setzt. Demzufolge entsprechen sich:

$$\eta = 0\,, \quad \frac{\omega_r}{\omega_\varrho} = 1 + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\,\omega_\varrho^2}\sin 2\sigma\,.\,\varDelta\sigma$$
$$= 90^0, \quad = 1 - \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\,\omega_\varrho^2}\sin 2\sigma\,.\,\varDelta\sigma.$$

Ich wähle zunächst die erstere Bedingung, lasse also die optische Axe mit dem Einfallslothe zusammenfallen. Und da in beiden Fällen $\frac{g}{\omega_r}(1 - k_r)$ sich nur um eine Grösse zweiter Ordnung von $\frac{g}{\omega_\varrho}(1 - k_\varrho)$ unterscheidet, so folgt:

$$\frac{\sin(\sigma + \varDelta\sigma)}{\sin\sigma} = \left(1 + 2\,\frac{g}{\omega_\varrho}(1 - k_\varrho)\cos\sigma\cos\psi\right)$$
$$\left(1 + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\,\omega_\varrho^2}\sin 2\sigma\,\varDelta\sigma\right),$$

$$\varDelta\sigma\left(1 - \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\,\omega_\varrho^2}\sin 2\sigma\,\mathrm{tang}\,\sigma\right) = 2\,\frac{g}{\omega_\varrho}(1 - k_\varrho)\sin\sigma\cos\psi.$$

Es mögen nun die höheren Potenzen von $\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\,\omega_\varrho^2}$ vernachlässigt und:

$$\omega_\varrho^2 = {}^1/_2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{v^2}{n^2},\ k_\varrho = k$$

gesetzt werden. Dann wird:

$$\varDelta\sigma = \frac{g}{v}\,n\,(1 - k)\sin\sigma\cos\psi\left(1 - 2\,\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}\sin^2\sigma\right).$$

Dieser Ausdruck fällt wieder mit dem (Gl. 12) für isotrope Mittel erhaltenen zusammen, wenn $n_1^2 = n_2^2$.

Wie dort, erhält man für den wahren Austrittwinkel, sofern $\frac{e}{r} = \frac{\varepsilon}{\varrho} = n$ gesetzt werden darf:

$$e = \varepsilon + n\,\varDelta\sigma$$

und für den scheinbaren:

$$e + u_2 = \frac{g}{v}\Big[\sin(\psi - p) - \sin(\psi + p)$$

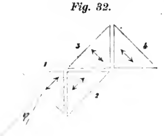
57.
$$+ 2n^2(1-k)\sin p \cos\psi \left(1 - 2\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\sin^2 p\right)\Big].$$

Dieser Werth reducirt sich wegen $n^2(1-k) = 1$ und $p = 45^0$ auf:

57b. $$\varDelta = -\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\,\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\cos\psi.$$

Solche Reflexionsprismen lassen sich in mehrfacher Art zu einem Systeme von steigender Wirkung zusammenstellen. Die von Sellmeier vorgeschlagene Combination ist Fig. 32 angedeutet. Für die einzelnen Prismen derselben erhält man der Reihe die folgenden innern Incidenz- und Spiegelungswinkel:

Fig. 32.



1	σ	$\sigma + \varDelta\sigma_1$
2	$90 - \sigma - \varDelta\sigma_1$	$90 - \sigma - \varDelta\sigma_1 + \varDelta\sigma_2$
3	$90 - \sigma - \varDelta\sigma_1 + \varDelta\sigma_2$	$90 - \sigma - \varDelta\sigma_1 + \varDelta\sigma_2 + \varDelta\sigma_3$
4	$\sigma + \varDelta\sigma_1 - \varDelta\sigma_2 - \varDelta\sigma_3$	$\sigma + \varDelta\sigma_1 - \varDelta\sigma_2 - \varDelta\sigma_3 + \varDelta\sigma_4$

n. s. f.

Es müssen also, wenn 1 und 4 den Spiegelungswinkel vergrössern, 2 und 3 denselben verkleinern. Nennt man nun den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Normalen der ersten Spiegelfläche ψ und beachtet, dass sowohl der Uebergang von $\psi < 90^0$ in $\psi > 90^0$ als auch der Uebergang von $\eta = 0$ in $\eta = 90^0$ die Prismenwirkung umkehrt, so ist offenbar die Anordnung so zu treffen, dass 1 und 2 die Axen parallel gerichtet, 2 und 3 dieselben gekreuzt, 3 und 4 wieder parallel haben . . . ., denn dann ist:

$$\varDelta_1 = \varDelta_4 = -\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\,\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\cos\psi$$

$$\varDelta_2 = \varDelta_3 = +\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\,\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\sin\psi.$$

Folglich wird die Totalwirkung von 1 und 2 oder von 3 und 4:

$$w = -\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\,\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}\,(\cos\psi + \sin\psi).$$

Da sowohl die beiden ersteren als die beiden letzteren Prismen die Axen gleichgerichtet haben, so darf man sie selbstverständlich als zusammenhängendes Doppelprisma aus dem gleichen Krystallstück herausschneiden. So ergibt sich denn schliesslich für die Wirkung von m solchen Doppelprismen:

$$W = -m\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\,\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}\,(\cos\psi + \sin\psi).$$

Dieselbe erreicht ihren negativen und positiven Maximalwerth für $\psi = 45^0$ und $\psi = 225^0$ und wird 0 in den beiden darauf senkrechten Stellungen. Der Maximalwerth:

$$W = -2m\,\frac{g}{v}\,\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$$

oder auch, wenn angenähert: $n_1^2 + n_2^2 = 2\,n_1\,n_2$ gesetzt wird:

$$W' = -m\,\frac{g}{v}\,\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1\,n_2}$$

ist ganz der nämliche, der schon l. c. von Sellmeier, allerdings ohne Mittheilung der Entwickelung selber, publicirt wurde.

Richtet man nun die Vorderfläche des beschriebenen, aus einer Paarzahl von Doppelprismen bestehenden Systems auf einen leuchtenden Punkt, so erhält man der entwickelten Theorie zufolge zwei nahe beisammen stehende Bilder desselben, ein unabgelenktes ordinäres und ein mehr oder weniger abgelenktes extraordinäres. Die Entfernung derselben, die je nach der Orientirung des Apparates einen bald positiven, bald negativen Werth hätte, lässt sich in bekannter Weise mittelst eines mit Mikrometer versehenen Fernrohrs messen. Und da bezüglich dieser Richtungsänderungen der Wellennormale Schwingungsdauer und Wellenlänge nicht in Betracht kommen, so müsste der Versuch mit terrestrischem wie mit kosmischem Lichte in gleicher Weise gelingen. Es lässt sich daher ein im Brennpunkt einer Collimatorlinse aufgestelltes Fadenkreuz (oder Spalt) am vortheilhaftesten als Sehzeichen verwenden.

Setzt man für Kalkspath und zwar für gelbes Licht $n_2 = 1{,}658$; $n_1 = 1{,}486$ und nimmt man $\frac{g}{v} = 20'',445$, so ergäbe sich die maximale Entfernung der beiden Bilder zu:

$$W' = \pm 4'',457\ m.$$

Bei Anwendung von 4 Prismen und bei Rotation des Apparates um 180° würde man eine Verschiebung des extraordinären Bildes von nicht weniger als

$$35'',6$$

erhalten müssen.

Ich habe die Sellmeier'sche Prismen-Combination (4 Prismen mit 8-maliger innerer Reflexion) durch Hofmann in Paris ausführen lassen. Der Apparat gab hinlänglich scharfe Bilder, die, weil die vorgeschriebene Neigung der Flächen gegen die Axe natürlich nicht absolut scharf eingehalten werden konnte, um einen Bogen von einigen Minuten von einander abstanden. Die angewandte Vergrösserung war eine solche, dass noch eine Verschiebung von 2″ gemessen werden konnte. Die Beobachtungen geschahen um Mittag, und wurde dabei die ganze Vorrichtung (mitsammt der daran befestigten Lampe) um eine verticale Axe herumgedreht.

So wurde constatirt, dass sowohl das extraordinäre wie das ordinäre Bild ihre Stellung zum Fadenkreuz ganz unveränderlich bewahren, dass also keine Spur einer Verschiebung Statt hat.

Damit stehen wir vor einem analogen negativen Resultate, wie seiner Zeit Fresnel bezüglich des Arago'schen Experimentes. Fassen wir zunächst die Gesammtwirkung eines jeden Doppelprisma der Sellmeier'schen Combination in's Auge, dann ist klar, dass dieselbe eine qualitativ gleiche ist und quantitativ nur von der Grösse des Winkels ψ abhängt. Wenn nun zwei Doppelprismen bei allen möglichen Werthen von ψ ($\psi = \psi_1$ für das eine und $\psi = 90^0 - \psi_1$ für das andere) eine resultirende Wirkung $= 0$ geben, so ist das nur dann möglich, wenn die Wirkung eines jeden einzelnen für sich der Null gleich ist. — Was ferner die beiden Einzel-

prismen 1 und 2 betrifft, so lässt sich der Ausdruck 57 für den scheinbaren Austrittswinkel auch auf die Form bringen:

$$e + a_2 = -\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\left[1 - n^2(1-k)\left(1 \mp \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}\right)\right]\cos\psi.$$

Beide wirken gleich für $\psi = \pm 45^0$, und die Wirkung des einen von ihnen reducirt sich auf 0 für $\psi = 90^0$ oder $\psi = 0$. Damit also die resultirende Wirkung für alle Winkel ψ verschwinde, müsste entweder sein:

für 1 und für 2 $\quad n^2(1-k) = 0$

oder für 1 $\quad n^2(1-k) = 1 + \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$

und gleichzeitig für 2 $n^2(1-k) = 1 - \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$.

Ersteres widerspricht dem Verhalten des isotropen Mittels, in das ein doppelbrechendes für $n_1 = n_2$ übergeht. Letzteres dagegen würde zu der unwahrscheinlichen Annahme führen, dass die Entrainirungsgeschwindigkeit des Aethers durch die Lage der Spiegelfläche (als Austrittsfläche) zur Krystallaxe bedingt sei.

Aus Allem wird man den Schluss ziehen, dass die einfache Uebertragung der für isotrope Medien geltenden Ausdrücke auf die anisotropen der Natur derselben widerspricht.

Eine Erklärung des negativen Resultates der Sellmeier'schen Combination erscheint also nur möglich mittelst Erweiterung der Fresnel'schen Theorie. Es wird eben angenommen werden müssen, dass in Folge der Bewegung die Elasticität oder Dichtigkeit des Krystalläthers (und folglich des Körperäthers überhaupt) sich ändert, so dass die inneren Wellen sich in demselben mit einer allseitig modificirten Geschwindigkeit von Theilchen zu Theilchen fortpflanzen.

Andrerseits erscheint es plausibel, dass dieses Hervortreten des krystallinischen Charakters mit seinen nach den verschiedenen Richtungen hin verschiedenen Eigenschaften nur dann thatsächlich Statt hat, wenn bei der Einwirkung mehrere solche Richtungen unterschieden werden müssen. Es wird dann in dem Masse, als Bewegungsrichtung des Krystalles und Fortpflanzungsrichtung der Wellen sich einander nähern, das Gesetz der Lichtausbreitung dem für isotrope Medien gelten-

den mehr und mehr nahe kommen und schliesslich zugleich mit der Coincidenz jener beiden Richtungen mit demselben zusammenfallen.

Im Uebrigen wird die in Rede stehende neue Modification der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht, wie der Zuwachs $g\,k$, für $\pm g$ oder für $\varphi \lesseqgtr 90^0$ ihr Zeichen wechseln. Dahingegen wird sie eine Function sein von dem Winkel χ, den Wellennormale und optische Axe mit einander bilden; ich werde dieselbe bezeichnen durch $f(\chi)$.

Den genannten Anforderungen lässt sich nun in einfacher Weise genügen, wenn man das Gesetz der absoluten Lichtausbreitung, das nach Fresnel für isotrope Medien die Form hat:

$$\omega' = \omega + g\,k \cos\varphi,$$

durch Hinzufügung eines neuen Gliedes auf:

$$\omega' = \omega + g\,[k \cos\varphi + k' f(\chi) \sin\varphi]$$

erweitert. Hier bedeutet k' einen Factor, der proportional sein wird dem Doppelbrechungsvermögen des Mittels, und der vorderhand, wie auch $f(\chi)$, noch unbestimmt bleiben möge.

Dies vorausgesetzt, gestaltet sich die Berechnung der Sellmeier'schen Combination nunmehr folgendermassen.

An die Stelle der Gleichung 56 tritt zunächst die folgende:

$$59.\qquad \frac{\sin\sigma}{\sin(\sigma+\varDelta\sigma)} = \frac{\omega_\varrho - g(1-k)\cos(\sigma-\psi) + g k' f(\sigma)\sin(\sigma-\psi)}{\omega_r + g(1-k)\cos(\sigma+\psi) + g k' f(\pi-\sigma)\sin(\sigma+\psi)}.$$

Da σ nahezu $= 45^0$ ist, so werden $f(\sigma)$ und $f(\pi-\sigma)$ zwar den gleichen absoluten Werth haben, sich aber noch durch entgegengesetztes Zeichen unterscheiden können. Setzt man daher zur Abkürzung:

$$k' f(45^0) = \varkappa,$$

so wird entweder:

I. $\qquad k' f(135^0) = +\varkappa$

oder:

II. $\qquad k' f(135^0) = -\varkappa$

sein müssen. Wir werden der Reihe nach diese beiden Möglichkeiten erörtern.

I. Unter der ersteren Annahme reducirt sich Gleichung 59 auf:

$$1 + \varDelta\sigma = \frac{\omega_r}{\omega_\varrho}\left\{1 + \sqrt{2}\,\frac{g}{\omega}\,[(1-k)\cos\psi + \varkappa \sin\psi]\right\}.$$

Und wenn für $\frac{\omega_r}{\omega_\varrho}$ sein obiger Werth eingesetzt wird, so erhält man:

$$\varDelta\sigma\left(1 \pm \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\right) = \sqrt{2}\,\frac{g}{\omega}\,[(1-k)\cos\psi + \varkappa \sin\psi].$$

Und schliesslich für den scheinbaren Austrittswinkel:

$$e + \alpha_2 = -\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\left\{\left[1 - n^2(1-k)\left(1 \mp \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\right)\right]\cos\psi \right.$$
$$\left. - n^2\varkappa\left(1 \mp \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\right)\sin\psi\right\}$$
$$= -\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\left\{[1 - n^2(1-k)]\cos\psi \right.$$
$$\left. \pm n^2(1-k)\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\cos\psi - n^2\varkappa\sin\psi\right\},$$

sofern $\varkappa$ als Function des Doppelbrechungsvermögens eine Grösse von der Ordnung $\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}$ ist und die höhern Potenzen dieses Quotienten vernachlässigt werden dürfen.

Entsprechend den obigen Ausführungen behalte ich den Fresnel'schen Werth des Coefficienten k auch für Krystalle bei, so dass:

$$1 - n^2(1-k) = 0$$

wird. Der übrig bleibende Betrag der scheinbaren Ablenkung ist dann:

$$w = \sqrt{2}\,\frac{g}{v}\left\{\mp\left[n^2(1-k)\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\right]\cos\psi + [n^2\varkappa]\sin\psi\right\}$$
$$= \mp A\cos\psi + B\sin\psi.$$

Untersuchen wir jetzt die Wirkung w der beiden Einzelprismen 1 und 2 sowie ihre resultirende Wirkung W für beliebige Winkel ψ. Es entsprechen sich:

$$\psi_1 = 0^0 \quad w_1 = -A$$
$$\psi_2 = -90^0 \quad w_2 = -B \qquad W = -(A-B)$$

$$\psi_1 = 45^0 \quad w_1 = -(A-B)\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\psi_2 = -45^0 \quad w_2 = +(A-B)\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad W = -(A-B)\sqrt{2}$$

$$\psi_1 = 90^0 \quad w_1 = +B$$
$$\psi_2 = 0^0 \quad w_2 = +A \qquad W = -(A-B)$$

$$\psi_1 = \psi \qquad w_1 = -A\cos\psi + B\sin\psi \qquad W = -(A-B)(\cos\psi + \sin\psi).$$
$$\psi_2 = -(90^0 - \psi) \qquad w_2 = +A\sin\psi - B\cos\psi$$

Damit nun, wie es die Erfahrung verlangt, die Gesammtwirkung des Doppelprisma verschwinde, dazu ist nothwendig und hinreichend, dass man habe:

$$A - B = 0$$

d. h.

60. $$\varkappa = + \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}(1-k).$$

II. Fassen wir jetzt die zweite Möglichkeit in's Auge, dass nämlich:

$$k' f(135^0) = - k' f(45^0) = - \varkappa$$

sei. Die Gleichung 59 wird dann für Prisma 1:

$$1 + \varDelta\sigma = \frac{\omega_r}{\omega_\varrho}\left\{1 + \sqrt{2}\,\frac{g}{\omega}\,(1 - k - \varkappa)\cos\psi\right\}.$$

Und es folgt weiter:

$$\varDelta\sigma\left(1 + \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\right) = \sqrt{2}\,\frac{g}{\omega}\,(1 - k - \varkappa)\cos\psi.$$

$$e + \alpha_2 = -\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\left[1 - n^2(1 - k - \varkappa)\left(1 - \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\right)\right]\cos\psi$$

$$= -\sqrt{2}\,\frac{g}{v}\left[n^2\varkappa + n^2(1-k)\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\right]\cos\psi.$$

Unter der gemachten Annahme verschwindet schon die Wirkung des Einzelprisma 1, sobald man setzt:

60b. $$\varkappa = - \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}(1-k).$$

Um nun zu entscheiden, welche von den beiden Möglichkeiten der Natur entspricht, dazu wäre erforderlich, ein jedes Doppelprisma der Sellmeier'schen Combination in seine Elemente zu zerschneiden und dieselben unter Ausschluss etwa der geradzahligen Prismen 2, 4, 6 . . . der Fig. 32 zu einer passenden Verstärkungssäule wieder zusammenzufügen. Die Maximalwirkung derselben, wie sie der ersteren Annahme entspricht, berechnet sich für m Prismen zu:

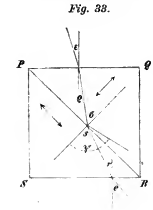
$$W' = -2m\,\frac{g}{v}\,\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}.$$

Dahingegen bleibt die Säule im zweiten Fall völlig wirkungslos.

Statt der gedachten Combination von Reflexionsprismen habe ich eine solche von Refractionsprismen vorgezogen. Diese letzteren zeichnen sich ja überhaupt vor ersteren dadurch aus, dass das durchgehende Licht aus einem einzigen und nicht mehr aus zwei verschieden gerichteten Strahlen besteht.

Die angewandte Combination ist Figur 33 angedeutet.

Fig. 33.



Sie besteht aus zwei rechtwinkligen und gleichschenkligen Doppelspathprismen, für welche die eine optische Axe mit dem Lothe zur Trennungsfläche, die andere mit der Trennungsfläche selbst zusammenfällt.

Steht die Vorderfläche des ersten senkrecht zur scheinbaren Richtung der einfallenden Strahlen, und heisst wieder der wirkliche Einfallswinkel ε, so hat man:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sigma = 45 + \varrho.$$

Bewegt sich das Prisma gegen das Loth zur Trennungsfläche in der Richtung ψ und nennt man den Brechungswinkel $s = \sigma + \varDelta\sigma$, so erfolgt die Brechung nach dem Gesetz:

$$61. \quad \frac{\sin\sigma}{\sin s} = \frac{\omega_\varrho - g(1-k_\varrho)\cos(\sigma-\psi) + gk'f(\sigma)\sin(\sigma-\psi)}{\omega_s - g(1-k_s)\cos(s-\psi) + gk'f(\pi-\sigma)\sin(s-\psi)}.$$

Unterscheiden wir wieder die beiden möglichen Annahmen.

I. Wird $f(45^0) = f(135^0) = +\frac{\varkappa}{k'}$ gesetzt, dann differiren sämmtliche mit g behaftete, einander analoge Glieder nur um Grössen zweiter Ordnung. Dieselben heben sich bei Ausführung der Division fort, und es bleibt:

$$\frac{\sin\sigma}{\sin s} = \frac{\omega_\varrho}{\omega_s}.$$

Die Brechung einer unter dem wirklichen Einfallswinkel

σ auffallenden Welle geht dann bei Ruhe wie bei Bewegung in gleicher Weise vor sich.

Dahingegen ist dieser Einfallswinkel σ selber von der Bewegung abhängig. Man hat nämlich:

$$\omega_\varrho^2 = \omega^2_1 - (\omega^2_1 - \omega^2_2) \cos^2 \sigma$$
$$\omega_r^2 = \omega^2_1 - (\omega^2_1 - \omega^2_2) \sin^2 (\sigma + \Delta\sigma).$$

Daraus leitet man ab:

$$\omega_\varrho^2 = \omega_r^2 + (\omega^2_1 - \omega^2_2)(\sin 2\sigma \,.\, \Delta\sigma - \cos 2\sigma)$$

und wegen: $\sigma = 45 + \varrho$, $\sin 2\sigma = 1$, $\cos 2\sigma = -2\varrho$

$$\frac{\omega_\varrho}{\omega_r} = 1 - \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}(\Delta\sigma + 2\varrho).$$

So kommt:

$$\Delta\sigma\left(1 - \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\right) = 2\varrho\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}.$$

Und wenn man die höhern Potenzen von $(n^2_1 - n^2_2)$ vernachlässigt und ϱ durch $\frac{\varepsilon}{n}$ ersetzt:

$$n\Delta\sigma = +2\varepsilon\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}.$$

Weiter hat man:

$$s = \sigma + \Delta\sigma = 45 + r,\ \Delta\sigma = r - \varrho,\ e = nr = n(\varrho + \Delta\sigma).$$

Folglich für den Werth des wirklichen Austrittswinkels:

$$e = \varepsilon\left(1 + 2\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\right).$$

Nun beträgt der Aberrationswinkel beim Eintritt:

$$\varepsilon = \frac{g}{v}\sin(\psi - 45 - \varepsilon)$$

und der beim Austritt:

$$\alpha_2 = -\frac{g}{v}\sin(\psi - 45 - e),$$

so dass man nahezu hat:

$$\alpha_2 = -\varepsilon.$$

Und so bleibt für den scheinbaren Austrittswinkel $e + \alpha_2$ der Werth:

$$w = +2\frac{g}{v}\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\sin(\psi - 45^0).$$

Vertauscht man in beiden Prismen die Lage der optischen Axe gegen einander, so erhält man für das Geschwindigkeitsverhältniss den Werth:

$$\frac{\omega_\varrho}{\omega_r} = 1 + \frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}(\varDelta\sigma + 2\varrho)$$

und darum schliesslich:

$$w = -2\,\frac{g}{v}\,\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\sin(\psi - 45^0).$$

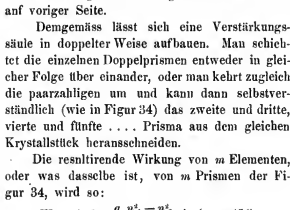
Dagegen ändert die Wirkung des Doppelprisma sich nicht, wenn man den Hauptschnitt PQR um die Linie QR als Axe um 180° herumdreht, während die Richtung der Translation die gleiche bleibt. Es wird dann:

$$\sigma = 45 - \varrho,\ s = 45 - r,\ \varDelta\sigma = \varrho - r$$

$$e = n(\varrho - \varDelta\sigma)$$

$$\cos 2\sigma = +2\varrho,\ \varDelta\sigma = -2\varrho\,\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2},$$

Figur 34.



und daraus ergibt sich der gleiche Endwerth wie auf voriger Seite.

Demgemäss lässt sich eine Verstärkungssäule in doppelter Weise aufbauen. Man schichtet die einzelnen Doppelprismen entweder in gleicher Folge über einander, oder man kehrt zugleich die paarzahligen um und kann dann selbstverständlich (wie in Figur 34) das zweite und dritte, vierte und fünfte .... Prisma aus dem gleichen Krystallstück herausschneiden.

Die resultirende Wirkung von m Elementen, oder was dasselbe ist, von m Prismen der Figur 34, wird so:

$$W = +2m\,\frac{g}{v}\,\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}\sin(\psi - 45^0).$$

II. Ein völlig verschiedenes Resultat erhält man, wenn:

$$f(135^0) = -f(45^0) = -\frac{x}{k'}$$

gesetzt wird. Aus Gleichung 61 wird zunächst folgende:

$$1 + \varDelta\sigma = \frac{\omega_r}{\omega_\varrho}\left[1 - 2\,\frac{g}{\omega}\,x\sin(45 - \psi)\right].$$

Und wird für $\frac{\omega_r}{\omega_\varrho}$ sein obiger Werth eingesetzt, so kommt:

$$\varDelta\sigma = -\left[\frac{n^2_2 - n^2_1}{n^2_1 + n^2_2} 2\varrho + 2\frac{\vartheta}{\omega}\varkappa \sin(45 - \psi)\right]$$
$$= -2\frac{g}{v}\left(\frac{n^2_2 - n^2_1}{n^2_1 + n^2_2}\frac{1}{n} - n\varkappa\right)\sin(\psi - 45^0).$$

Es wird also $\varDelta\sigma = 0$, sobald man annimmt, dass:

$$\varkappa = -\frac{n^2_1 - n^2_2}{n^2_1 + n^2_2}(1 - k),$$

und damit verschwindet dann jede Wirkung der gedachten Combination, die sich bezüglich der Bewegung durch nichts mehr von einer einfach brechenden planparallelen Platte unterscheiden würde.

Ich habe nun eine solche Verstärkungssäule von der Einrichtung und ungefähren Grösse der Fig. 34 von Hofmann anfertigen lassen. Es sind die Prismen, die früher zur Ausführung des Sellmeier'schen Vorschlages gedient haben, dazu benutzt und an den Enden noch zwei weitere Halbprismen zur Ergänzung hinzugefügt. Das System versprach sonach gemäss der letzten Gleichung der Nummer I eine Maximalwirkung von nicht weniger als:

$$W' = 44'',57,$$

wenn der Apparat gegen Mittag um 180° gedreht wird.

Der Versuch wurde zum Theil mit Gaslicht und zum Theil mit Drummond'schem Kalklicht ausgeführt, und betrug insbesondere im letzten Fall die Breite des Spaltes nur ganz wenige Secunden. Das Prismensystem gab trotz 50maliger Vergrösserung hinlänglich scharfe und reine Bilder.

So wurde constatirt, dass bei Drehung des Apparates das extraordinäre wie das ordinäre Bild weder gegen einander, noch auch gegen das Fadenkreuz die mindeste wahrnehmbare Verschiebung erleiden. Dagegen bewegt sich das extraordinäre Spaltbild mit einer bemerkenswerthen Geschwindigkeit, sobald das Prismensystem selber zwischen Spaltrohr und Fernrohr auch nur um ganz wenig gedreht wird. Es dürfte sich dasselbe dieserhalb recht wohl zu demonstrativen Versuchen empfehlen.

Das beschriebene Experiment hat sonach den unzweideutigen Beweis geliefert, dass von den beiden Werthen 60 und 60_b. der letztere der Wirklichkeit entspricht, und dass folglich

schon die Wirkung eines einzelnen Reflexionsprisma der Null gleich ist.

Das Ensemble der mit beiden Combinationen ausgeführten Versuche leistet ferner die Bürgschaft, dass auch die Art der Erweiterung, wie wir sie in Gleichung 58 dem Gesetze der absoluten Lichtausbreitung durch Hinzufügung eines neuen Gliedes für anisotrope Medien gegeben, durchaus zulässig ist und bei passender Bestimmung der $f(\chi)$ allen Thatsachen Rechnung tragen wird.

Nun wurde gefunden:

$$f(135^0) = -f(45^0),$$

und die einfachste Verallgemeinerung, die sich hier machen lässt, ist offenbar die Annahme:

$$f(\chi) = \sin 2\chi.$$

Ersetzt man andererseits in Gleichung 60_b den Coefficienten k durch seinen Werth in n und beachtet, dass dort:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2_1} + \frac{1}{n^2_2}\right),$$

so schreibt sich:

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2_1} - \frac{1}{n^2_2}\right)$$

und sonach:

$$62. \qquad k' f(\chi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2_1} - \frac{1}{n^2_2}\right) \sin 2\chi.$$

Dieser Werth soll nun benutzt werden zur Berechnung der Modification, welche die scheinbare Ablenkung in einem gewöhnlichen doppeltbrechenden Prisma erfährt, dessen Hauptschnitt auf der brechenden Kante senkrecht steht, und das in der Ebene dieses Hauptschnittes bewegt wird.

Es sei Figur 7 (S. 45) der Hauptschnitt des Prisma, und es bilde die optische Axe mit der Wellennormale des durchgehenden Lichtes für den Ruhezustand den Winkel χ. Entsprechend den früheren Bezeichnungen lässt sich nun schreiben:

$$e = F(\varepsilon, n)$$

$$\begin{aligned} e' - e &= F(\varepsilon + \delta\varepsilon, n + \delta n) - F(\varepsilon, n) \\ &= \frac{dF}{d\varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{dF}{dn}\delta n \\ &= \delta e + \Delta e. \end{aligned}$$

Und addirt man zu dieser Modification der **wirklichen** Ablenkung die schliessliche Aberration des austretenden Strahles α_2, so beträgt die Modification der **scheinbaren** Ablenkung die Summe:

$$\delta e + \Delta e + \alpha_2.$$

Ich werde wieder die beiden ersten Glieder derselben getrennt untersuchen: das erstere enthält die in Folge der fehlerhaften Anfstellung des Prisma bewirkte Aenderung des Austrittswinkels für das nnmodificirte n, die zweite die Modification dieses Anstrittes in Folge der geänderten Brechung.

1) Der bei der Aufstellung gemachte Aberrationsfehler hat den Werth:

$$\alpha_1 = \frac{g}{v} \cos(\varepsilon - \psi - p),$$

und so beträgt der wirkliche Einfallswinkel:

$$\varepsilon' = \varepsilon + \alpha_1.$$

Man hat nun:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho} = \frac{v}{\omega_0}, \quad \frac{\sin(\varepsilon + \delta\varepsilon)}{\sin(\varrho + \delta\varrho)} = \frac{v}{\omega_0'}$$

$$\omega^2_0 = \omega^2_1 - (\omega^2_1 - \omega^2_2)\cos^2\chi$$

$$\omega'^2_0 = \omega^2_1 - (\omega^2_1 - \omega^2_2)\cos^2(\chi + \delta\varrho).$$

Und daraus ergibt sich:

$$\omega'_0 = \omega_0\left(1 + \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi \,.\, \delta\varrho\right)$$

$$\frac{\sin(\varepsilon + \delta\varepsilon)}{\sin(\varrho + \delta\varrho)} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho}\left(1 - \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi \,.\, \delta\varrho\right)$$

$$\delta\varrho = \delta\varepsilon \,.\, \cot\varepsilon \operatorname{tang}\varrho\left(1 + \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi \operatorname{tang}\varrho\right).$$

Es ist dann weiter:

$$r + \varrho = 2p, \quad \delta r = -\delta\varrho$$

$$\frac{\sin(e + \delta e)}{\sin(r + \delta r)} = \frac{\sin e}{\sin r}\left(1 - \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi\, \delta\varrho\right)$$

$$\delta e = -\delta\varrho \,.\, \operatorname{tang} e \cot r\left(1 + \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi \operatorname{tang} r\right)$$

$$= -\delta\varepsilon \quad \operatorname{tang} e \cot r \cot\varepsilon \operatorname{tang}\varrho \times$$

$$\times\left[1 + \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi(\operatorname{tang}\varrho + \operatorname{tang} r)\right].$$

Und wenn schliesslich für $\delta\varepsilon$ sein Werth α_1 eingesetzt wird:

$$\delta e = -\frac{g}{v}\frac{\cos r \cos \varepsilon}{\cos e \cos \varrho}\cos(\varepsilon - \psi - p)\left[1 + \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2} \times \right.$$
$$\left. \times \sin 2\chi\,(\operatorname{tang}\varrho + \operatorname{tang} r)\right].$$

Dieser Ausdruck fällt mit dem S. 46 für isotrope Mittel erhaltenen znsammen, wenn $\omega^2_1 = \omega^2_2$.

2) Die durch die Bewegnng modificirte innere Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen schreibt sich analog wie früher:

$$\omega_g = \omega''_0 + g\varkappa \sin 2\chi \sin(\Sigma - \Psi) - \ldots.$$

unter ω''_0 diejenige Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Ruhezustandes verstanden, die der nm $\varDelta\varrho$ veränderten Richtung $\chi + \varDelta\varrho$ der inneren Welle gegen die optische Axe entspricht. Man findet:

$$\Sigma - \Psi = -BAX = -[90 - (\varrho - \psi - p)],$$

folglich:

$$\omega_g = \omega''_0 - g\varkappa \sin 2\chi \cos(\varrho - \psi - p) - \ldots.$$

Und so geht die erste Brechung vor sich nach dem Gesetze:

63. $$\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\varrho + \varDelta\varrho)} = \frac{v - g\sin(\varepsilon - \psi - p)}{\omega''_0 - g(1-k)\sin(\varrho - \psi - p) - g\varkappa\sin 2\chi\cos(\varrho - \psi - p)}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass:

$$\omega''_0 = \omega_0\left(1 + \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi\,\varDelta\varrho\right)$$

gefnnden wird, schreibt sich diese Gleichnng auch:

$$\sin(\varrho + \varDelta\varrho) = \sin\varrho\left\{1 + \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi\,\varDelta\varrho\right.$$
$$+ \frac{g}{v}\Big[\sin(\varepsilon - \psi - p) - n(1-k)\sin(\varrho - \psi - p)$$
$$\left. - n\varkappa \sin 2\chi\cos(\varrho - \psi - p)\Big]\right\}.$$

$$\varDelta\varrho = \frac{g}{v}\operatorname{tang}\varrho\Big[\sin(\varepsilon - \psi - p) - n(1-k)\sin(\varrho - \psi - p)$$
$$- n\varkappa\sin 2\chi\cos(\varrho - \psi - p)\Big]\left(1 + \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi\operatorname{tang}\varrho\right),$$

wenn nämlich die höheren Potenzen von $(\omega^2_1 - \omega^2_2)$ vernachlässigt werden.

Um zur zweiten Brechung überzugehen, so ist:

$$r + \varrho = 2p, \quad \varDelta r = -\varDelta\varrho,$$

und die Brechung geht vor sich nach dem Gesetz:

$$\frac{\sin(e+\varDelta e)}{\sin(r+\varDelta r)}\,\frac{\sin\,\varrho+\varDelta\varrho)}{\sin\varepsilon}=\frac{v+g\sin(e+\psi-p)}{v-g\sin(\varepsilon-\psi-p)}.$$

Man findet schliesslich:

$$\varDelta e=-\frac{g}{v}\operatorname{tang}e\Big\{\Big[\sin(\varepsilon-\psi-p)-n(1-k)\sin(\varrho-\psi-p)$$
$$-n\varkappa\sin 2\chi\cos(\varrho-\psi-p)\Big]\Big[1+\frac{\omega^2_1-\omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi\,(\operatorname{tang}\varrho$$
$$+\operatorname{tang}r)\Big]\frac{\operatorname{tang}\varrho}{\operatorname{tang}r}-\Big[\sin(e+\psi-p)-n(1-k)\sin(r+\psi-p)$$
$$+n\varkappa\sin 2\chi\cos(r+\psi-p)\Big]\Big\}.$$

Addirt man jetzt zu $\delta e+\varDelta e$ die Aberration des austretenden Strahles — dieselbe beträgt:

$$a_2=\frac{g}{v}\cos(e+\psi-p)$$

— hinzu, so erhält man die totale Modification der scheinbaren Ablenkung. Dieselbe vereinfacht sich zunächst dadurch, dass wegen $n^2(1-k)=1$ sämmtliche Glieder, die nicht mit den Coefficienten der doppelten Brechung behaftet sind, aus derselben fortfallen.

So ergibt sich die Wirkung des Prisma zu:

$$w=-\frac{g}{v}\operatorname{tang}e\Big\{-n\varkappa\sin 2\chi\Big[\cos(\varrho-\psi-p)\frac{\operatorname{tang}\varrho}{\operatorname{tang}r}$$
$$+\cos(r+\psi-p)\Big]+\frac{\omega^2_1-\omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi\Big[\sin(\varepsilon-\psi-p)$$
$$-n(1-k)\sin(\varrho-\psi-p)-n\varkappa\sin 2\chi\cos(\varrho-\psi-p)$$
$$+\cot\varepsilon\cos(\varepsilon-\psi-p)\Big]\frac{\operatorname{tang}\varrho+\operatorname{tang}r}{\operatorname{tang}r}\operatorname{tang}\varrho\Big\}.$$

Oder wenn das vorletzte, mit $n\varkappa$ behaftete Glied vernachlässigt und reducirt wird:

$$w=-\frac{g}{v}\sin 2\chi\operatorname{tang}e\frac{\operatorname{tang}\varrho+\operatorname{tang}r}{\operatorname{tang}r}\Big\{-n\varkappa\cos(\varrho-\psi-p)$$
$$+\frac{\omega^2_1-\omega^2_2}{2\omega^2}\Big[\sin(\varepsilon-\psi-p)-\frac{1}{n}\sin(\varrho-\psi-p)$$
$$+\cot\varepsilon\cos(\varepsilon-\psi-p)\Big]\operatorname{tang}\varrho\Big\}.$$

Der Werth der letzten Klammer zieht sich zunächst auf:

$$\operatorname{tang}\varrho\Big[\frac{\cos(\psi+p)}{\sin\varepsilon}-\frac{1}{n}\sin(\varrho-\psi-p)\Big]$$

zusammen, und wenn man für $\varkappa$ seinen früher erhaltenen Werth:

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2_1} - \frac{1}{n^2_1}\right), \quad n\varkappa = \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\frac{1}{n}$$

einsetzt, so kommt schliesslich:

$$w = -\frac{g}{v}\frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2}\sin 2\chi \operatorname{tang} e \frac{\operatorname{tang}\varrho \operatorname{tang} r}{\operatorname{tang} r}\left(\operatorname{tang}\varrho\frac{\cos(\psi + p)}{\sin\varepsilon}\right.$$
$$\left. - \operatorname{tang}\varrho\frac{\cos(\psi + p)}{\sin\varepsilon}\right) = 0.$$

Ist aber die Summe der doppeltbrechenden Antheile der Incremente δe und Δe gleich 0, so heben sich beide genau einander auf.

Dass nun in der That die Erfahrung das hier berechnete Resultat bestätigen werde, unterliegt nach dem Früheren wohl keinem Zweifel. Daraus ergibt sich dann evident die Berechtigung der Annahme:

$$f(\chi) = \sin 2\chi.$$

Werfen wir hiernach einen kurzen Rückblick auf die von uns behandelten Apparate:

Die Combination der Refractionsprismen verhält sich der Bewegung gegenüber wie eine planparallele Platte eines isotropen Mittels. Es heben sich die beiden äusseren Aberrationen auf, und das Geschwindigkeitsverhältniss der Wellen zu beiden Seiten der Trennungsfläche wird der Einheit gleich.

Bei dem Reflexionsprisma verlaufen die Strahlen ausserhalb desselben wie bei einem solchen aus Glas, und wenn auch die Totalwirkung des Kalkspathprisma dem eines Glasprisma gleich ist, so rührt das wieder daher, dass das Verhältniss der wirklichen Geschwindigkeiten der Wellen vor und nach der Spiegelung gleich Eins ist. So hebt denn die innere physische Aberration die beiden äusseren physiologischen auf.

Bei dem gewöhnlichen einfachen Prisma endlich erfährt die innere Welle eine merkliche Modification ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Dieselbe wird aber aufgehoben durch den Einfluss der Modification des Einfallswinkels. Und so wiederholt sich hier für den doppeltbrechenden Antheil dasselbe, was für den einfach brechenden schon bekannt war.

Wohl hatte ich gehofft, bei vorliegender Untersuchung zu einem anderen positiven Resultate zu gelangen. Wäre wirklich der Effect der besprochenen Combinationen nicht gleich Null, dann böte sich ein Mittel, die etwaige Bewegung des Sonnensystems mittelst einfacher Benutzung von Sonnen- oder irdischem Lichte auf das schärfste zu verfolgen. Oben (S. 92) habe ich nachgewiesen, dass auch die bisherigen Beugungsversuche Ångström's zur Lösung dieses Problems ebensowenig haben beitragen können.

So bescheide ich mich denn mit der durchgeführten Erweiterung der Fresnel'schen Formel. Ihr zufolge ist das Gesetz der Lichtverbreitung in einem bewegten doppeltbrechenden Medium für die extraordinäre Welle ausgesprochen in den Beziehungen:

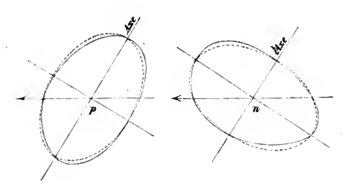
$$\omega' = \omega_g + g\,k \cos\varphi$$

$$\omega_g = \omega + g\left(\frac{1}{n^2_1} - \frac{1}{n^2_2}\right) \sin\chi \cos\chi \sin\varphi \qquad (64.)$$

$$k = \frac{n^2_1 - 1}{n^2_1} \sin^2\chi + \frac{n^2_2 - 1}{n^2_2} \cos^2\chi.$$

Die zweite derselben gilt zunächst für den Hauptschnitt, indess wird ihre Form auch für jeden Diametralschnitt der Fläche Gl. 53 bestehen bleiben, sofern man die beiden Halbaxen (ω_1, ω_2) des Hauptschnittes durch die Halbaxen des Diametralschnittes ersetzt.


Fig. 35.



Die Figur 35 soll diesen durch die Translation bewirkten Antheil der Aenderung der innern Fortpflanzungsgeschwindigkeit und zwar für die Ebene des Hauptschnittes zur Anschauung bringen. p bezieht sich auf einen positiven, n auf einen negativen Krystall. Man sieht, dass diese Modification für die Richtung der Axen und für die der Bewegung verschwindet, und dass sie für beide Arten von Krystallen in entgegengesetzter Weise verläuft.

Abhandlung VII.

(Vergl. Pogg. Ann. Bd. CXLVIII S. 435—448.)

Die Wellenfläche bewegter doppeltbrechender Mittel. Fixirung des Strahles durch die ponderablen Moleküle.

Wenngleich der Ausdruck, den wir in der letzten Abhandlung für die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellen im Hauptschnitt einaxiger Krystalle erhalten haben, hinlänglich complicirt ist und mich anfangs von der weiteren Behandlung abhielt, so führt derselbe doch wieder zu überraschend einfachen und eleganten Formeln zurück. Es möge daher gestattet sein, die vorgetragene Theorie in noch zwei wichtigen Punkten zu vervollständigen.

Während bisher nur die gespiegelten und gebrochenen inneren Wellen selbst in ihrem Gange verfolgt wurden, soll jetzt auch der Lauf der zugehörigen Strahlen entwickelt und mit der gleichzeitigen Bahn der ponderablen Theilchen verglichen werden.

Zur Construction dieser Strahlen bedarf man des bezüglichen Hauptschnittes der Wellenfläche, und so handelt es sich zunächst um die Ableitung desselben. Nun durchlaufen die Wellen den absoluten Raum mit einer Geschwindigkeit, die sich auch so schreibt:

$$\omega' = \sqrt{\omega_1^2 \sin^2\chi + \omega_2^2 \cos^2\chi} + g\left[1 - \frac{1}{v^2}(\omega_1^2 \sin^2\chi + \omega_2^2 \cos^2\chi)\right]\cos\varphi - \frac{g}{v^2}(\omega_1^2 - \omega_2^2)\sin\chi\cos\chi\sin\varphi.$$

Bezeichnet man noch den Winkel zwischen optischer Axe und Bewegungsrichtung durch ψ, so dass:

$$\varphi + \chi = \psi, \quad \varphi = \psi - \chi,$$

so fassen sich die beiden letzten Glieder in einfacher Weise zusammen, und es kommt:

$$\text{64}_b. \quad \omega' = \sqrt{\omega_1^2 \sin^2\chi + \omega_2^2 \cos^2\chi} + g\left[\left(1 - \frac{1}{n_1^2}\right)\sin\psi \sin\chi + \left(1 - \frac{1}{n_2^2}\right)\cos\psi\cos\chi\right].$$

Man erhält jetzt den gesuchten Hauptschnitt der Wellenfläche als Enveloppe der durch vorstehende Gleichung repräsentirten Geschwindigkeitsfläche in bekannter Weise mittelst der Gleichungen:

$$x\cos\chi + y\sin\chi = \sqrt{\omega_1^2 \sin^2\chi + \omega_2^2\cos^2\chi} + g(k_1 \sin\psi\sin\chi + k_2\cos\psi\cos\chi)$$

$$-x\sin\chi + y\cos\chi = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)\sin\chi\cos\chi}{\sqrt{\omega_1^2\sin^2\chi + \omega_2^2\cos^2\chi}} + g(k_1\sin\psi\cos\chi - k_2\cos\psi\sin\chi).$$

Multiplicirt man die erste mit $\sin\chi$, die zweite mit $\cos\chi$ und addirt, so kommt:

$$y = \sin\chi\left[\sqrt{\omega_1^2\sin^2\chi + \omega_2^2\cos^2\chi} + \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)\cos^2\chi}{\sqrt{\omega_1^2\sin^2\chi + \omega_2^2\cos^2\chi}}\right] + g k_1 \sin\psi,$$

oder:

$$y' = y - g k_1 \sin\psi = \frac{\omega_1^2 \sin\chi}{\sqrt{\omega_1^2\sin^2\chi + \omega_2^2\cos^2\chi}}.$$

Multiplicirt man dagegen die erstere mit $\cos\chi$, die zweite mit $\sin\chi$ und subtrahirt, so wird:

$$x = \cos\chi\left[\sqrt{\omega_1^2\sin^2\chi + \omega_2^2\cos^2\chi} - \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)\sin^2\chi}{\sqrt{\omega_1^2\sin^2\chi + \omega_2^2\cos^2\chi}}\right] + g k_2 \cos\psi.$$

oder:

$$x' = x - g k_2 \cos\psi = \frac{\omega_2^2\cos\chi}{\sqrt{\omega_1^2\sin^2\chi + \omega_2^2\cos^2\chi}}.$$

y' und x', in welche die Werthe von y und x für $g = 0$ übergehen, sind also die Coordinaten der Wellenfläche für den Zustand der Ruhe; sie befriedigen bekanntlich die Gleichung einer Ellipse:

$$\frac{y'^2}{\omega^2_1} + \frac{x'^2}{\omega^2_2} = 1.$$

Ersetzt man daher in dieser Gleichung y' und x' durch ihre Werthe in y nnd x, so hat der gesnchte Hauptschnitt der Wellenfläche des bewegten Mittels die Form:

65.
$$\frac{(y - g k_1 \sin \psi)^2}{\omega^2_1} + \frac{(x - g k_2 \cos \psi)^2}{\omega^2_2} = 1.$$
$$\omega^2_2 (y - g k_1 \sin \psi)^2 + \omega^2_1 (x - g k_2 \cos \psi)^2 = \omega^2_1 \omega^2_2.$$

Um statt der Punktcoordinaten Polarcoordinaten einzuführen, nenne man den Winkel zwischen optischer Axe und Strahl γ nnd setze:

66.
$$y = \sigma \sin \gamma, \qquad x = \sigma \cos \gamma.$$

Man erhält dann für den reciproken Werth der Strahlengeschwindigkeit:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{-g\left(\frac{k_1}{\omega^2_1} \sin \psi \sin \gamma + \frac{k_2}{\omega^2_2} \cos \psi \cos \gamma\right) + \sqrt{\frac{\sin^2 \gamma}{\omega^2_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{\omega^2_2} - \frac{g^2}{\omega^2_2 \, \omega^2_1} (k_2 \cos \psi \sin \gamma - k_1 \sin \psi \cos \gamma)}}{1 - g^2 \left(\frac{k^2_1}{\omega^2_1} \sin^2 \psi + \frac{k^2_2}{\omega^2_2} \cos^2 \psi\right)}$$

oder bei Vernachlässigung des Factors $\left(\frac{g}{v}\right)^2$:

67.
$$\frac{1}{\sigma} = \sqrt{\frac{\sin^2 \gamma}{\omega^2_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{\omega^2_2}} - g\left(\frac{k_1}{\omega^2_1} \sin \psi \sin \gamma + \frac{k_2}{\omega^2_2} \cos \psi \cos \gamma\right),$$

welche Ausdrücke sich für $g = 0$ anf das bekannte erste Glied des letzteren redneiren.

Was ferner den Winkel γ betrifft, den der sich der Wellennormale (ω', χ) zuordnende Strahl (σ) mit der optischen Axe hildet, so ergibt sich für denselben gemäss Gleichung 66:

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{y}{x} = \frac{\omega^2{}_1 \sin\chi + g k_1 \sin\psi \sqrt{\omega^2{}_1 \sin^2\chi + \omega^2{}_2 \cos^2\chi}}{\omega^2{}_2 \cos\chi + g k_2 \cos\psi \sqrt{\omega^2{}_1 \sin^2\chi + \omega^2{}_2 \cos^2\chi}},$$

und wenn die höheren Potenzen von $\frac{g}{v}$ vernachlässigt werden:

68. $$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\omega^2{}_1}{\omega^2{}_2} \operatorname{tang} \chi \left[1 + g\,\omega \left(\frac{k_1 \sin\psi}{\omega^2{}_1 \sin\chi} - \frac{k_2 \cos\psi}{\omega^2{}_2 \cos\chi}\right)\right],$$

wo zur Abkürzung ω statt des Wurzelausdrucks gesetzt ist.

Dies vorausgesetzt, sei PQR (Fig. 36) der Hauptschnitt eines doppeltbrechenden Prisma, der zugleich auch die optische

Fig. 36.



Axe enthalte. Es befinde sich dasselbe zunächst in Ruhe, und so falle auf die Vorderfläche unter dem beliebigen Einfallswinkel ε_0, also aus der Richtnng $O'A$, eine ebene Welle. Dieselbe folge in ihrem extraordinären Antheil der Wellennormale AB_0 und entwickle den Strahl AD_0. Das Prisma werde dann in der Richtung PV mit beliebiger Geschwindigkeit g bewegt, und zugleich so gegen die einfallende Welle gedreht, dass nach wie vor ε_0 der scheinbare Einfallswinkel

bleibt. In Folge dieser Drehung um den Aberrationswinkel α_1 wird offenbar der wirkliche Einfallswinkel $\varepsilon = \varepsilon_0 - \alpha_1$, die Wellennormale gelangt in eine neue Richtung AB und ebenso der zugehörige Strahl in die neue Richtung AD. Wird die austretende Welle mit einem Fernrohr aufgefangen, so wissen wir bereits, dass die scheinbare prismatische Ablenkung von der Bewegung unabhängig ist, ganz so, als ob die Substanz des Prisma zu den isotropen zählte.

Nun lehrt die Theorie der gebrochenen Fernrohre und ebenso der Boscovich'sche Versuch, dass in diesem letzteren Falle in der aus Prisma, Objectiv und Fadenkreuz (oder aus Prisma und Dioptern) bestehenden Combination die Anordnung derselben gleichgültig ist. Untersuchen wir, ob auch dieser Satz für die anisotropen Mittel seine Gültigkeit bewahrt.

Ich nehme an, der scheinbare Einfallswinkel ε_0 werde für ein auffallendes Wellenelement durch zwei mit dem Prisma selbst verbundene Diopter O' und A ein für allemal fixirt. Ebenso mögen an der Hinterfläche des Prisma die beiden an ihm befestigten Diopter D und S' den einer bestimmten Bewegung entsprechenden scheinbaren Austrittswinkel feststellen. Damit nun auch bei diesem Arrangement die scheinbare Ablenkung von der Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung unabhängig werde, dazu ist nothwendig, dass der Punkt D mit D_0, und wie bereits feststeht, $S'DR'$ mit $90^0 - e_0$ zusammenfalle.

Es bleibt also zu beweisen, dass in dem nämlichen Augenblick, in welchem das bei A eingetretene Wellenelement längs der (Strahlen-) Richtung des Raumes AD in D anlangt, auch das Krystalltheilchen D_0 in diesem Raumpunkte D mit ihm zusammentrifft. Zöge man alsdann durch D_0 eine zur Translationsrichtung PV parallele Gerade, so würde dieselbe die Strahlenrichtung in einem Punkte schneiden, der bestimmt ist durch die Proportion:

69. $$D_0 D : AD = g : \sigma.$$

Der verlangte Nachweis lässt sich nun in folgender Weise führen. Nennt man den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Vorder- und Hinterfläche des Prisma resp.

ψ_1 und ψ_2 und unterscheidet ferner die Winkel $(\varrho_0, r_0, \chi_0, \gamma_0)$ des Ruhezustandes von denen $(\varrho, r, \chi, \gamma)$ der Bewegung, so ergibt zunächst das Dreieck $A D_0 D$ die Beziehung:

$$\frac{D_0 D}{A D} = \frac{\sin D_0 A D}{\sin A D_0 D}.$$

Nun ist:

$$D_0 A D = \gamma - \gamma_0, \quad A D_0 D = r_0 + B_0 A D_0 + 180 - \psi_2,$$

oder wegen:

$$B_0 A D_0 = \gamma_0 - \chi_0, \quad \varrho_0 + r_0 = p = \psi_2 - \psi_1,$$
$$A D_0 D = 180 + \gamma_0 - \chi_0 - (\varrho_0 + \psi_1)$$

und weil:

$$\varrho_0 + \psi_1 + \chi_0 = \psi$$
$$A D_0 D = 180 + \gamma_0 - \psi$$

und darum schliesslich:

$$\frac{D_0 D}{A D} = \frac{\gamma - \gamma_0}{\sin(\psi - \gamma_0)}.$$

Setzt man ferner: $\frac{\sin \varepsilon_0}{\sin \varrho_0} = \frac{v}{\omega_0} = n$ und beachtet, dass $\varrho_0 - \varrho = \chi - \chi_0 = \delta\chi$, so schreibt sich das modificirte Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = \frac{v - g\cos(\varepsilon + \psi_1)}{\omega'_0 - g(1-k)\cos(\varrho + \psi_1) - g\varkappa \sin 2\chi \sin(\varrho + \psi_1)}$$
$$= \frac{\sin(\varepsilon_0 - \alpha_1)}{\sin(\varrho - \delta\chi)},$$

wo:

$$\omega'_0 = \omega_0 \left(1 + \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{2\omega^2} \sin 2\chi \cdot \delta\chi\right) = \omega_0 (1 + n^2 \varkappa \sin 2\chi \cdot \delta\chi)$$

und:

$$\alpha_1 = \frac{g}{v} \sin(\varepsilon + \psi_1).$$

Man leitet daraus ab:

$$\delta\chi = \frac{g}{v}\,\frac{\operatorname{tang}\varrho\,[\cot\varepsilon\sin(\varepsilon+\psi_1) - \cos(\varepsilon+\psi_1) + n(1-k)\cos(\varrho+\psi_1) + n\varkappa\,\sin 2\chi\sin(\varrho+\psi_1)]}{1 + n^2\varkappa\sin 2\chi\operatorname{tang}\varrho}$$

und mit Berücksichtigung von $n(1-k) = \frac{1}{n} = \frac{\sin\varrho}{\sin\varepsilon}$ schliesslich:

$$\delta\chi = \frac{g}{v}\,\frac{\sin(\varrho+\psi_1)}{n} = \frac{g}{v}\,\frac{\sin(\psi-\chi_0)}{n}. \tag{70.}$$

Dieses sich so einfach gestaltende Increment $\delta\chi$ ist eben die Summe der früheren: $\delta\varrho + \varDelta\varrho$.

Von dem Winkel der beiden Wellennormalen gelangt man weiter zu dem Winkel der Strahlen. Es ist zunächst zufolge Gl. 68 für $g = 0$:

$$\operatorname{tang}\gamma_0 = \frac{\omega^2_1}{\omega^2_2}\operatorname{tang}\chi_0$$

und für die Bewegung:

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\omega^2_1}{\omega^2_2}\operatorname{tang}(\chi_0+\delta\chi)\left[1 + g\omega\left(\frac{k_1\sin\psi}{\omega^2_1\sin\chi} - \frac{k_2\cos\psi}{\omega^2_2\cos\chi}\right)\right].$$

Folglich wird:

$$\operatorname{tang}(\gamma-\gamma_0) = \frac{\frac{\omega^2_1}{\omega^2_2}\left[\frac{\delta\chi}{\cos^2\chi} + g\omega\operatorname{tang}\chi\left(\frac{k_1\sin\psi}{\omega^2_1\sin\chi} - \frac{k_2\cos\psi}{\omega^2_2\cos\chi}\right)\right]}{1+\operatorname{tang}^2\gamma_0}. \tag{68b.}$$

Setzt man für $\delta\chi$ und ebenso für k_1 und k_2 ihre Werthe, so kommt:

$$\gamma - \gamma_0 = \frac{\omega^2_1}{\omega^2_2}\,\frac{\frac{g}{v}\,\frac{\sin(\psi-\chi)}{n} + g\omega\left[\left(\frac{1}{\omega^2_1} - \frac{1}{v^2}\right)\sin\psi\cos\chi - \left(\frac{1}{\omega^2_2} - \frac{1}{v^2}\right)\cos\psi\sin\chi\right]}{\cos^2\chi\left(1 + \frac{\omega^4_1}{\omega^4_2}\operatorname{tang}^2\chi\right)}$$

und definitiv:

$$\gamma - \gamma_0 = g\,\omega\,\frac{\omega^2_1}{\omega^2_2}\,\frac{\dfrac{\sin\psi\cos\chi}{\omega^2_1} - \dfrac{\cos\psi\sin\chi}{\omega^2_2}}{\cos^2\chi\left(1 + \dfrac{\omega^4_1}{\omega^4_2}\operatorname{tang}^2\chi\right)}.$$

Endlich entwickelt sich aus Gl. 68_b:

$$\cos\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^4_1}{\omega^4_2}\operatorname{tang}^2\chi_0}},\quad \sin\gamma_0 = \frac{\dfrac{\omega^2_1}{\omega^2_2}\operatorname{tang}\chi_0}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^4_1}{\omega^4_2}\operatorname{tang}^2\chi_0}}$$

und daraus weiter:

$$\sin(\psi - \gamma_0) = \frac{\omega^2_1}{\cos\chi}\,\frac{\dfrac{\sin\psi\cos\chi}{\omega^2_1} - \dfrac{\cos\psi\sin\chi}{\omega^2_2}}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^4_1}{\omega^4_2}\operatorname{tang}^2\chi}}.$$

Man erhält sonach den folgenden Quotienten:

$$\frac{\gamma - \gamma_0}{\sin(\psi - \gamma_0)} = \frac{g\,\omega}{\omega^2_2\cos\chi\sqrt{1 + \dfrac{\omega^4_1}{\omega^4_2}\operatorname{tang}^2\chi}} = \frac{g\,\omega}{\sqrt{\omega^4_1\sin^2\chi + \omega^4_2\cos^2\chi}}$$

oder schliesslich:

72. $$\frac{D_0 D}{A D} = g\sqrt{\frac{\omega^2_1\sin^2\chi + \omega^2_2\cos^2\chi}{\omega^4_1\sin^2\chi + \omega^4_2\cos^2\chi}}.$$

Dem Radicanden lässt sich eine andere und zwar bekanntere Form geben, wenn man statt des Winkels χ zwischen Axe und Wellennormale den Winkel γ zwischen Axe und Strahl einführt. Es ist zunächst:

$$\cos\chi = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^4_2}{\omega^4_1}\operatorname{tang}^2\gamma}},\quad \sin\chi = \frac{\dfrac{\omega^2_2}{\omega^2_1}\operatorname{tang}\gamma}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^4_2}{\omega^4_1}\operatorname{tang}^2\chi}}$$

$$\frac{\gamma - \gamma_0}{\sin(\psi - \gamma_0)} = g\,\frac{\omega}{\omega^2_2}\cos\gamma\sqrt{1 + \frac{\omega^4_2}{\omega^4_1}tg^2\gamma} = g\omega\sqrt{\frac{\sin^2\gamma}{\omega^4_1} + \frac{\cos^2\gamma}{\omega^4_2}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega^2_1\sin^2\chi + \omega^2_2\cos^2\chi} = \sqrt{\frac{\dfrac{\sin^2\gamma}{\omega^2_1} + \dfrac{\cos^2\gamma}{\omega^2_2}}{\dfrac{\sin^2\gamma}{\omega^4_1} + \dfrac{\cos^2\gamma}{\omega^4_2}}}.$$

Folglich:

72_b. $$\frac{D_0 D}{A D} = g\sqrt{\frac{\sin^2\gamma}{\omega^2_1} + \frac{\cos^2\gamma}{\omega^2_2}},$$

d. h.

$$D_0 D : A D = g : \sigma.$$

Der Nachweis, den ich hier bezüglich der Brechung und bezüglich des Austrittspunktes D geliefert, gilt offenbar auch für die Spiegelung und für alle zwischen A und D_0 enthaltenen Krystall- und alle zwischen A und D liegenden Strahlenpunkte. Legt man daher um diejenige Richtung, welche ein Strahl im Innern des Prisma bei einer bestimmten Bewegung desselben einschlägt, eine unendlich dünne cylindrische Röhre, so durchgleitet derselbe die Axe dieser Röhre, ohne ihre Wandungen zu berühren, auch bei jeder andern beliebigen Bewegung von Mittel und Röhre, so lange nur der scheinbare äussere Einfallswinkel constant erhalten wird.

Setzt man in Gl. 65 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $k_1 = k_2 = k$, so nimmt dieselbe die Form an:

$$(y - gk \sin \psi)^2 + (x - gk \cos \psi)^2 = \omega^2,$$

und lässt man die X-Axe des Coordinatensystems mit der Bewegungsrichtung zusammenfallen, so wird $\sin \psi = 0$, $\cos \psi = 1$ und daher:

$$y^2 + (x - gk)^2 = \omega^2,$$

welche Gleichung mit der in Abhandlung III für isotrope Mittel entwickelten Gl. 15 völlig übereinstimmt.

Um vom Meridianschnitt dieser Wellenfläche zu ihrer kubischen Ausdehnung überzugehen, genügt es, $y^2 + z^2$ statt y^2 einzusetzen, so dass also kommt:

$$z^2 + y^2 + (x - gk)^2 = \omega^2.$$

Und gibt man jetzt dem Coordinatensystem eine solche Drehung, dass die Bewegungsrichtung nunmehr mit den Axen resp. die Winkel L, M, N bildet, so erhält die Gleichung der Wellenfläche der bewegten isotropen Mittel die folgende allgemeine und endgültige Form:

73. $(x - gk \cos L)^2 + (y - gk \cos M)^2 + (z - gk \cos N)^2 = \omega^2.$

Damit ferner die extraordinäre Wellenfläche bewegter einaxiger Mittel erstens für jeden die Bewegungsrichtung selbst enthaltenden Schnitt zu einer Gleichung von der Form der Gl. 65 hinführt, damit sie ferner zweitens für $\omega_1 = \omega_2$ mit der vorstehenden Wellenfläche bewegter isotroper Mittel

zusammenfällt und endlich drittens für $g = 0$ in das bekannte Huyghens'sche Rotationsellipsoid übergeht, dazu ist nothwendig, dass sie dargestellt wird durch den Ausdruck:

$$\omega^2_1 (x - g k_2 \cos L)^2 + \omega^2_2 [(y - g k_1 \cos M)^2 + (z - g k_1 \cos N)^2] = \omega^2_2 \omega^2_1.$$

Die Gesammtwellenfläche bewegter einaxiger Krystalle fasst sich also zusammen in die Gleichnngen:

$$74. \begin{cases} [\omega^2_1 x'^2 + \omega^2_2 (y'^2 + z'^2) - \omega^2_2 \omega^2_1] (x'^2 + y'^2 + z'^2 - \omega^2_2) = 0. \\ x' = x - g k_2 \cos L, \ y' = y - g k_1 \cos M, \ z' = z - g k_1 \cos N. \end{cases}$$

In analoger Weise beweist man endlich, dass die Wellenfläche bewegter zweiaxiger Krystalle repräsentirt wird durch die Gleichnngen:

$$75. \begin{cases} (\omega^2_1 x'^2 + \omega^2_2 y'^2 + \omega^2_3 z'^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \omega^2_1(\omega^2_2 + \omega^2_3) x'^2 \\ - \omega^2_2 (\omega^2_1 + \omega^2_3) y'^2 - \omega^2_3 (\omega^2_1 + \omega^2_2) z'^2 + \omega^2_3 \omega^2_2 \omega^2_1 = 0. \\ x' = x - g k_3 \cos L, \ y' = y - g k_2 \cos M, \ z' = z - g k_1 \cos N. \end{cases}$$

Sind daher allgemcin x', y', z' die Coordinaten der Wellenfläche eines Mittels für den Zustand der Rnhe, x, y, z die entsprechenden für den Zustand der Bewegung, und bildet die Bewegungsrichtung mit den Elasticitätsaxen als Coordinatenaxen die Winkel L, M, N, so geht die Gleichung der Wellenfläche des ruhenden Mittels dadurch in die des bewegten über, dass man setzt:

$$x' = x - g k_3 \cos L, \ y' = y - g k_2 \cos M, \ z' = z - g k_1 \cos N.$$

So ist denn die Behandlung unseres Problems in allgemeinster Weise durchgeführt. Und wenn auch einige von uns hingestellte Sätze nnr unter der beschränkten Annahme einer Bewegungsrichtung nnd Hanptschnitt enthaltenden Einfallsebene abgeleitet wurden, so steht ihre generelle Geltung doch über allem Zweifel. Das an den einzelnen streng darzuthnn, wird mit Hülfe des letzten Satzes sowie mittelst der Erwägnng, dass bei der Formulirnng des Spiegelungs- und Brechungsgesetzes nnr die in die Einfallsebene hineinfallende Componente der Bewegung in Betracht kommt, leicht gelingen, ist jedoch mehr Sache des Mathematikers als des Physikers.

ZUSATZ G.

Die Interferenz der doppelten Brechung.

Die neuerdings von Mascart*) constatirte Unveränderlichkeit der Interferenzstreifen einer parallel zur Axe geschnittenen Krystallplatte im polarisirten (irdischen oder Sonnen-) Licht lässt sich in doppelter Weise ableiten. Man geht entweder von der absoluten Geschwindigkeit der einzelnen Erschütterung aus, oder man berücksichtigt die Länge der inneren Wellen. Ich will zunächst den ersteren Weg einschlagen und mich überhaupt darauf beschränken, dass die Richtung des normal einfallenden Lichtes mit der Bewegungsrichtung der Erde zusammenfällt. Heisst dann L die wirkliche (zu unterscheiden von den beiden scheinbaren) Dicke der Krystallplatte, und bezeichnet man die Zeitdifferenz, um die die ordinäre Welle der extraordinären vorauseilt, mit $\varDelta$, so hat man:

$$\varDelta = \frac{L\left(1+\frac{g}{\omega_1}\right)}{\omega_1 + g k_1} - \frac{L\left(1+\frac{g}{\omega_2}\right)}{\omega_2 + g k_2} - \frac{L\left(\frac{g}{\omega_1} - \frac{g}{\omega_2}\right)}{v}.$$

Ist noch T die Schwingungsdauer der angewandten terrestrischen oder festen (Fixstern-) Lichtquelle, so hat man für die erstere:

$$\varDelta = m\,T\left(1-\frac{g}{v}\right), \text{ und schliesslich: } L(n_1 - n_2) = m \,.\, v \,.\, T$$

und für die zweite:

$$\varDelta = m\,T, \text{ folglich: } L(n_1 - n_2)\left(1-\frac{g}{v}\right) = m \,.\, v \,.\, T.$$

Bei Anwendung irdischen Lichtes fällt sonach die Geschwindigkeit g der Krystallplatte aus dem Endresultat heraus, und dieses ist das gleiche, als wenn die Platte ruhte.

*) Ann. de l'École Norm. No. 3 et 4, 1872.

Was sodann den anderen Weg, nämlich die Berücksichtigung der inneren Wellen, betrifft, so zeigte ich in Abh. IV S. 82, dass für Fixsternlicht:

$$\lambda_1 = \lambda' \left(1 + \frac{g}{v}\frac{n-1}{n}\right) = v' T \left(1 + \frac{g}{v}\frac{n-1}{n}\right)$$

ist. Bei Anwendung von irdischem Licht dagegen hat man zunächst für einen zwischen Lichtquelle und Mittel gelegenen Punkt des ruhenden Aethers:

$$T_1 = T\left(1 - \frac{g}{v}\right) \text{ und darum: } \lambda_1 = v' T_1 \left(1 + \frac{g}{v}\frac{n-1}{n}\right),$$

folglich:

$$\lambda_1 = \lambda' \left(1 + \frac{g}{v}\frac{1}{n}\right).$$

Auf jeden Fall kommen die genannten Wellenlängen dem ganzen Innern des Mittels, also ebensowohl den transferirten als den nicht transferirten Theilchen desselben zu. Es entspricht also einer Länge L des Mittels eine Anzahl von Wellenlängen, die gleich ist resp. $\frac{L}{(\lambda_1)_1}$ und $\frac{L}{(\lambda_1)_2}$.

So kommt zunächst für irdisches Licht:

$$\frac{L}{\lambda}\left(\frac{n_1}{1 + \frac{g}{v}\frac{1}{n_1}} - \frac{n_2}{1 + \frac{g}{v}\frac{1}{n_2}}\right) = m$$

oder:

$$L(n_1 - n_2) = m\lambda = m \,.\, v \,.\, T.$$

Und für Fixsternlicht:

$$\frac{L}{\lambda}\left(\frac{n_1}{1 + \frac{g}{v}\frac{n_1 - 1}{n_1}} - \frac{n_2}{1 + \frac{g}{v}\frac{n_2 - 1}{n_2}}\right) = m$$

oder:

$$L(n_1 - n_2)\left(1 - \frac{g}{v}\right) = m\lambda.$$

Man erkennt sofort, dass die erste hier gegebene Ableitung für die Constanz der Interferenzstreifen derjenigen analog ist, die früher zur Erklärung des von uns angestellten Brewster-Jamin'schen Interferenzversuches gedient hat. Die zweite Ableitung ist dagegen dieselbe, die schon oben bei der Behandlung der Rotationspolarisation entwickelt wurde.

Mascart selbst begnügt sich mit dem Hinweis, dass das von ihm erhaltene negative Resultat mit der Fresnel'schen Formel in Widerspruch stehe.

Was nun das eingeschlagene Verfahren betrifft, so ist dasselbe in Kürze folgendes. Man benutzt als Lichtquelle die Flamme einer Mischung von Alkohol und Holzgeist, wie es Fizeau gethan, oder einfacher die Flamme eines Bunsenschen Brenners, in die man ein Natronsalz, z. B. phosphorsaures Natron, einführt. Die einfallenden Strahlen werden mittelst eines grossen Nicols polarisirt, sie durchlaufen dann eine oder mehrere parallel zur Axe geschliffene Kalkspathplatten, deren Hauptschnitte mit der Polarisationsebene des Nicols einen Winkel von 45° bilden, darauf ein astronomisches Fernrohr von etwa 30 Cntm. Brennweite, dessen Ocular mit einem Analyseur versehen ist, und man bezieht die entstehenden Fransen auf das Fadenkreuz desselben. Die Streifen sind hyperbolisch und selbst bei Anwendung sehr dicker Platten noch schön und breit.

Mascart benutzte fünf Platten von 4 Mm. bis 81 Mm. Dicke und vermochte mittelst Combination derselben bis zu einer Gesammtdicke von 136 Mm. aufzusteigen. Dieser letzteren z. B. entspricht ein Gangunterschied von 39700 Wellenlängen, und man hätte eine Verschiebung von $^1/_4$ Franse mit Leichtigkeit feststellen können. Nichtsdestoweniger war das Resultat aller dieser vielfach modificirten Beobachtungen ein absolut negatives.

Mit Rücksicht auf die Frage, wie weit man bei Herstellung von Interferenzstreifen den Gangunterschied praktisch treiben könne, wurden später drei neue dickere Platten versucht und damit eine Gesammtdicke von 359 Mm. erhalten, der ein Gangunterschied von nicht weniger als 104828 Wellenlängen entspricht. Die Fransen blieben in Anbetracht der unvergleichlichen Reinheit des angewandten Materials der Platten klar und schön, indess hat Mascart davon absehen zu dürfen geglaubt, auch an ihnen das frühere negative Resultat zu constatiren. Zum Vergleich bemerke ich, dass die einst von Fizeau und Foucault auf anderem Wege erzielte Phasendifferenz nur 7400 Wellenlängen für Licht aus der Nähe der Fraunhofer'schen Linie *G* und 8000 für die brechbarsten Strahlen des Spectrums betrug.

Abhandlung VIII.

Theoretische Ableitung der Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in ruhenden und bewegten Mitteln.

1. Die isotropen Mittel.

Ueber die Vorstellung, die man sich bezüglich des wirklichen Herganges bei den Aberrationsphänomenen bilden kann, macht Beer [1]) die folgende, offenbar nicht unzutreffende Bemerkung: Ich denke mir, dass sich während der Bewegung eines Körpers in der von ihm eingeschlossenen Aethermasse sämmtliche zwischen 0 und g gelegene Geschwindigkeiten vorfinden, dass demzufolge in dieser Aethermasse und in dem dem Körper nächst angrenzenden Aether Strömungen vor sich gehen, ähnlich wie man nicht umhin kann, solche Strömnngen in der Flüssigkeitsmasse anznnehmen, welche sich in und an einem durch Wasser geschwenkten Schwamme befindet. Ich denke mir dann ferner, dass der effective Erfolg bei jenem sehr verwickelten Hergange nahezu derselbe ist, wie wenn man der in jedem Momente vom bewegten Körper eingeschlossenen Aethermasse eine gewisse mittlere Geschwindigkeit (gk) beilegte oder auch wie wenn man die Aethermasse in zwei gewisse Theile p und q theilte, jenem die eine Gränzgeschwindigkeit 0, diesem die andere Gränzgeschwindigkeit g beilegte.

In der That ist es neuerdings Boussinesq [2]) gelungen, auf Grnnd einer ähnlichen Theilung, nämlich der Scheidung

1) Pogg. Ann. Bd. 94, S. 433.

2) Journ. de Liouville, t. XIII, p. 313.

der unbewegt bleibenden Aethertheilchen und der als mitschwingend gedachten bewegten Körpertheilchen, den Differentialgleichungen der oscillatorischen Bewegung eine solche Form zu geben, dass sich daraus der Coefficient k entwickelt.

Zu demselben Resultate führt eine gegenwärtig von Sellmeier*) aufgestellte neue Theorie der dioptrischen Mittel, welche zwar auf gleicher Vorstellung beruht wie die von Boussinesq, sich indess durch strengere Formulirung ihrer Principien vortheilhaft auszeichnet.

Ich gebe die in Rede stehende Ableitung in möglichst allgemeiner Behandlung.

Denken wir uns ein jedes ponderable Mittel als Aggregat von Körper- und Aethertheilchen, die nach verschiedenen, bloss von der Entfernung abhängigen Gesetzen auf einander einwirken. Supponirt man zwischen den einzelnen Aethertheilchen eine Abstossung, dagegen zwischen Aether- und Körpertheilchen Anziehung, so wird jedes ponderable Molekül mit einer Art von Aetheratmosphäre umhüllt sein, und das ganze Mittel wird sich als eine Anhäufung von Zellen darstellen, in deren einzelner die Dichtigkeit des Aethers von der Mitte, wo sie der des umgebenden Aethers gleich ist, nach dem ponderablen Kerne hin allmälig anwächst. Wenn diese Dichtigkeit hiernach als eine periodische Function des Raumes erscheint, so dürfen wir doch immerhin annehmen, dass die Schnelligkeit ihres Anwachsens in der Mitte und überhaupt in grösserer Entfernung von den ponderablen Molekülen nur schwach ist und erst in unmittelbarer Nähe derselben eine merkliche Grösse erreicht. Es würde sonach der intramolekulare Aether, abgesehen von geringen periodischen Ungleichheiten, sowohl nach Elasticität als nach Dichtigkeit sich kaum vom freien Aether unterscheiden.

Fällt auf das Mittel von aussen her ein Lichtstrahl, so werden zunächst die Aethertheilchen und mittelbar durch sie auch die ponderablen Moleküle in die undulatorische Bewegung hineingezogen. Ein Mittel wird daher für um so durch-

*) Pogg. Ann. Bd. 145, S. 399 und Bd. 147, S. 386.

sichtiger gelten müssen, je genauer die Schwingungen der einen mit denen der andern zusammenstimmen und sich einander accommodiren. Im Uebrigen wird man nicht fehl gehen, wenn man den ponderablen Theilchen sehr viel kleinere Amplitüden zulegt als den intermediären Aethertheilchen.

Stellen wir uns jetzt das ponderable Gefüge als in rascher fortschreitender Bewegung begriffen vor, so dürfte es folgerichtig der vorgetragenen Ansicht entsprechen, wenn man sich den im Innern der Zellen befindlichen, gewissermassen freien Aether als im Zustand völliger Ruhe, die ponderablen Moleküle dagegen sammt ihren dichteren Hüllen als mit der vollen Translationsgeschwindigkeit behaftet vorstellt.

Um nun die Differentialgleichungen der oscillatorischen Bewegung auf ein so constituirtes Mittel anwenden zu können, mögen dieselben zunächst in Kürze entwickelt werden.

Was zuvörderst die homogenen isotropen Mittel betrifft, so gibt es in denselben entweder nur Transversalschwingungen oder nur Longitudinalschwingungen. Für diese Mittel wurden bereits in Abh. I S. 10 zwei Gleichungen (3 und 3_b) aufgestellt, die sich, wenn die vorausgesetzten ebenen Wellen parallel der Z-Axe verlaufen, nunmehr auch so schreiben:

76. $$\frac{d\varrho}{dt} = -v\frac{d\varrho}{dz}$$
$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = v^2\frac{d^2\varrho}{dz^2}.$$

Beiden ordnete sich die Gleichung 4 als Integralgleichung zu; dieselbe war:

77_a. $$\varrho = f\left(t - \frac{z}{v}\right).$$

Auch wurde bezüglich der vorletzten Gleichung schon angedeutet, dass sich ihr eine neue Seite abgewinnen lasse, die sie zu einer fruchtbaren Verknüpfung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit den elastischen Kräften des Mittels verwendbar mache.

Denken wir uns zu dem Ende das Mittel gleichzeitig von zwei verschiedenen Centren aus von Wellen durchzogen, die mit den Geschwindigkeiten $\pm v$ fortschreiten, und deren Schwingungsgesetze entsprechend durch die Gleichungen:

$$\varrho_1 = f\left(t - \frac{z}{v}\right), \quad \varrho_2 = F\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

repräsentirt seien. Es verlangt dann das (bei nnseren Voransetzungen) ohne Weiteres einlenchtende Princip der Superposition kleiner Bewegungen für den resultirenden Ausschlag ϱ den Ausdrnck:

$$77. \qquad \varrho = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + F\left(t + \frac{z}{v}\right).$$

Derselbe genügt gleichfalls den Differentialgleichungen 76 und muss daher als das allgemeinere Integral derselben betrachtet werden.

Wären nun die vorausgesetzten Partialbewegungen nach T periodisch, so dass sich etwa schreiben liesse:

$$\varrho = A_1 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v}\right) + A_2 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z}{v}\right),$$

so leitet man ab:

$$\varrho = (A_1 + A_2) \cos \frac{2\pi}{\lambda} z \sin \frac{2\pi}{T} t - (A_1 - A_2) \sin \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Damit ist aher die Ahscisse z aus der Phase herans nnd in die Amplitüde hineingetreten. Die Theilchen erreichen also, wenn noch $A_1 = \pm A_2$ genommen wird, gleichzeitig ihren positiven oder negativen Maximalausschlag nnd gehen im gleichen Augenhlick dnrch die Gleichgewichtslage hindurch. Es sind also die fortschreitenden Wellen in stehende umgewandelt. Und da die gleiche Amplitüde für je zwei nm die Strecke $\frac{1}{2}\lambda$ von einander abstehende Theilchen wiederkehrt, so ist diese letztere gleich dem Abstande zweier sogenannten Bäuche oder Knoten. Könnte man nnn das Mittel dnrch zwei absolut feste, dnrch irgendwelche Knoten hindurchgelegte Ebenen hegränzen, so dürfte die Spontanthätigkeit der Erschütternngscentren aufhören, und die Theilchen des Mittels würden als ebensoviele ideelle Pendel ihre Schwingungen ohne Ende fortführen. Die treibende Kraft derselben ist alsdann einzig die Elasticität des Mittels, und nennen wir die in einer nnendlich dünnen Schicht vom Querschnitt 1 enthaltene Masse m, so würde dieselbe parallel den Axen die Beschlennigungen

$\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}$ hervorrufen, so dass sich ihre Componenten schreiben liessen:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y.$$

Man supponire ferner zwischen den einzelnen Theilchen des Mittels, beispielsweise des homogenen Aethers, irgend welche Centralkräfte, und das Potential*) der Wirkung, welche ein in der Nähe von μ befindliches Aethertheichen μ' auf μ ausübt, heisse P. Bezeichnet man dann für den Gleichgewichtszustand des Aethers die Coordinaten von μ mit x, y, z, die von μ' mit $x + \mathfrak{x}$, $y + \mathfrak{y}$, $z + \mathfrak{z}$, und die Entfernung beider mit $\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}$, so werden die zu jener Zeit von μ' auf μ (als Theilchen einer Transversalwelle) geübten Kräfte gleich $\mu\mu'\frac{dP}{d\mathfrak{x}}$, $\mu\mu'\frac{dP}{d\mathfrak{y}}$ sein.

Ich werde mich jetzt im Folgenden des Zeichens Δ bedienen, um dadurch denjenigen Zuwachs anzudeuten, welchen irgend eine von der Anordnung des Aethers abhängige Grösse bei dessen Uebergang von dem Gleichgewicht in den Schwingungszustand erfährt. Demzufolge werden die Kräfte zwischen den vibrirenden Theilchen μ' und μ gleich:

$$\mu\mu'\left(\frac{dP}{d\mathfrak{x}} + \Delta\frac{dP}{d\mathfrak{x}}\right), \quad \mu\mu'\left(\frac{dP}{d\mathfrak{y}} + \Delta\frac{dP}{d\mathfrak{y}}\right).$$

Und nimmt man die Summe dieser von allen zur Umgebung von μ gehörenden Theilchen μ', so erhält man bei Ausführung der angedeuteten Variation beispielsweise für die nach der X-Axe gerichtete Componente:

$$\mu\,\Sigma\mu'\left(\frac{dP}{d\mathfrak{x}} + \frac{d^2P}{d\mathfrak{x}^2}\Delta\mathfrak{x} + \frac{d^2P}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}}\Delta\mathfrak{y}\right).$$

Andererseits schreibt sich offenbar:

$$\Delta x = \xi = \xi(t, z), \quad \Delta(x + \mathfrak{x}) = \xi(t, z + \mathfrak{z}),$$
$$\Delta y = \eta = \eta(t, z), \quad \Delta(y + \mathfrak{y}) = \eta(t, z + \mathfrak{z}).$$

Die letzteren beiden Ausdrücke lassen sich nach Potenzen von $\mathfrak{z}$ entwickeln. Bricht man die Reihe nach dem zweiten

---

*) Vergl. C. Neumann, Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Halle 1863.

Gliede ab und subtrahirt sodann die ersteren Ausdrücke, so kommt:

$$\Delta \mathfrak{x} = \mathfrak{z}\frac{d\xi}{dz} + \frac{\mathfrak{z}^2}{2}\frac{d^2\xi}{dz^2}, \quad \Delta \mathfrak{y} = \mathfrak{z}\frac{d\eta}{dz} + \frac{\mathfrak{z}^2}{2}\frac{d^2\eta}{dz^2}.$$

Durch Snbstitution dieser Werthe in den für die letztgenannte Componente erhaltenen Ausdruck gewinnt dieser die Form:

$$\mu\,\Sigma\mu'\left[\frac{dP}{d\mathfrak{x}} + \frac{d^2P}{d\mathfrak{x}^2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\xi}{dz} + \frac{\mathfrak{z}^2}{2}\frac{d^2\xi}{dz^2}\right) + \frac{d^2P}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}}\left(\mathfrak{z}\frac{d\eta}{dz} + \frac{\mathfrak{z}^2}{2}\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)\right].$$

Wir werden nun das Potential P als eine Function des Quadrates von $\mathfrak{r}$ ansehn, also $P = f(\mathfrak{r}^2)$ setzen und den ersten und zweiten der nach $\mathfrak{r}^2$ gebildeten Differentialquotienten durch $P' = f'(\mathfrak{r}^2)$, $P'' = f''(\mathfrak{r}^2)$ bezeichnen. Es kommt so:

$$\frac{dP}{d\mathfrak{x}} = 2P'\mathfrak{x}, \quad \frac{d^2P}{d\mathfrak{x}^2} = 2P' + 4P''\mathfrak{x}^2, \quad \frac{d^2P}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}} = 4P''\mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$
$$\frac{dP}{d\mathfrak{y}} = 2P'\mathfrak{y}, \quad \frac{d^2P}{d\mathfrak{y}^2} = 2P' + 4P''\mathfrak{y}^2,$$

Bevor ich diese Werthe in vorstehenden Ausdruck einführe, erinnere ich daran, dass das vorausgesetzte Mittel homogen-isotrop ist (oder dass wenigstens die durch periodische Ungleichheiten des Aethers hervorgerufenen Dichtigkeitswechsel sowie der etwaige Einfluss vorhandener Körpermoleküle vernachlässigt werden sollen). Unter diesen Umständen lassen sich durch die Gleichgewichtslage des auf seine Bewegung zu untersuchenden Punktes μ parallel den Coordinatenaxen drei Ebenen hindurchlegen, die die ganze Umgebung desselben auf die entstehenden acht Octanten ganz gleichmässig vertheilen, derart, dass je zwei Theilchen μ' mit den Gleichgewichts-Coordinaten $+\mathfrak{x}$, $+\mathfrak{y}$, $+\mathfrak{z}$ und $-\mathfrak{x}$, $-\mathfrak{y}$, $-\mathfrak{z}$, oder $+\mathfrak{x}$, $+\mathfrak{y}$, $-\mathfrak{z}$ und $-\mathfrak{x}$, $-\mathfrak{y}$, $+\mathfrak{z}$.... einander diametral gegenüberliegen. Bei der Summirung fallen daher sämmtliche Glieder, die ungerade Potenzen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ enthalten, fort, und es bleibt:

$$\mu\,\Sigma\mu'(P' + 2P''\mathfrak{x}^2)\mathfrak{z}^2 . \frac{d^2\xi}{dz^2}.$$

Ebenso erhält man für die Kraftcomponente parallel der Y-Axe:

$$\mu\,\Sigma\mu'(P' + 2P''\mathfrak{y}^2)\mathfrak{z}^2 . \frac{d^2\eta}{dz^2}.$$

Führt man die Summation aus und beachtet die Gleichheit der Anordnung des Mittels nach den beiden Axen, so lässt sich schreiben:

$$\Sigma\mu'(P'+2P''\mathfrak{x}^2)\mathfrak{z}^2 = \Sigma\mu'(P'+2P''\mathfrak{y}^2)\mathfrak{z}^2 = E. \tag{78}$$

Und wenn man die Componenten für alle in der oben besprochenen unendlich dünnen Schicht vom Querschnitt 1 enthaltenen Aethertheilchen zusammenfasst, die Summation also auf die Masse m ausdehnt, so kommt:

$$X = mE\frac{d^2\xi}{dz^2},\quad Y = mE\frac{d^2\eta}{dz^2}.$$

Die Gleichsetzung der beiden für X und Y erhaltenen Ausdrücke liefert dann die Differentialgleichungen:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = e\frac{d^2\xi}{dz^2},\quad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = e\frac{d^2\eta}{dz^2}, \tag{79}$$

wofern das Product mE als die die Schwingungen erhaltende elastische Kraft mit e bezeichnet wird. Da dieselben ihrer Form nach völlig mit Gl. 76_b zusammenfallen, so erhält man aus beiden die bekannte, für den Schall*) schon von Newton abgeleitete Beziehung:

$$v^2 = \frac{e}{m} = E. \tag{80}$$

Wendet man sich nunmehr von den stehenden Schwingungen zu den fortschreitenden zurück, so weiss man zufolge den Bemerkungen auf S. 9, dass die so eben genauer definirte Elasticität des Mittels eine gewisse mechanische Arbeit, die von aussen her einem bestimmten Theilchen desselben zugeführt wird, von Schicht zu Schicht ungeändert fortleitet. Ersetzt man in der ersten der Gl. 76 $\frac{d\varrho}{dt}$ durch die Oscillationsgeschwindigkeit c, $\frac{d\varrho}{dz}$ durch die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels des bezüglichen Elementes der Wellenlinie und der Abscissenaxe, so erhält dieselbe die Form:

$$c = -v\,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

*) Für die Schwingungen von Flüssigkeiten und festen Körpern tritt an die Stelle von e der Elasticitätscoefficient, für Saitenschwingungen die Spannung der Saite.

Und wenn man quadrirt und für v^2 seinen Werth aus Gl. 80 einsetzt:

$$mc^2 = e\,\mathrm{tang}^2\alpha.$$

Es weckt also die von aussen her gegebene und durch einen bestimmten Querschnitt des Aethers hindurchgehende lebendige Kraft ($^1/_2\, mc^2$) in demselben eine bestimmte elastische Triebkraft, die sich misst durch $^1/_2\, e\,\mathrm{tang}^2\alpha$.

Thun wir hiernach einen Schritt weiter und gehen vom homogenen Aether zu den ponderablen durchsichtigen Mitteln über. Wir denken uns in deren Innern den reinen Aether mit Körpermolekülen untermischt, d. h. mit trägen Massen, die, verglichen mit der Stärke der von der Welle ausgehenden Impulse, nur eine verhältnissmässig schwache Einwirkung auf einander und auf die Aethertheilchen ausüben. Wäre diese Einwirkung geradezu $= 0$, so würden die Körpertheilchen vom schwingenden Aether mit fortgerissen und an den Oscillationen desselben als eine Art von Ballast mit gleicher Schwingungsdauer und Amplitüde participiren. Ist daher in einer unendlich dünnen Schicht eines solchen Mittels vom Querschnitt 1 neben der Aethermasse m die Körpermasse M enthalten, und dringt aus dem Weltäther eine Welle mit gegebener lebendiger Kraft in dasselbe ein, so wird an der Gränzschicht mc^2 in das gleichwerthige $(m + M)\,c_1{}^2$ umgewandelt, und die geweckte elastische Triebkraft bleibt die nämliche wie im Weltäther, so dass sich nunmehr für das Innere auch schreibt ($\alpha_1 = \alpha$):

$$(m + M)\,c_1{}^2 = e\,\mathrm{tang}^2\alpha_1.$$

Indess selbst dann noch, wenn aus irgend welchen Gründen die ponderablen Theilchen μ' für sich besondere Amplitüden A', resp. Oscillationsgeschwindigkeiten c' erhielten, würde, abgesehen von den dann nothwendig auftretenden inneren Absorptionen, der obige Zusammenhang zwischen fortgeleiteter lebendiger Kraft und Krümmung der Wellenlinie seine Geltung bewahren. In diesem allgemeineren Fall hat man sonach für das Innere des Mittels:

$$m c^2 + \Sigma \mu' c'^2 = e \operatorname{tang}^2 \alpha$$

oder:

$$m \left(1 + \Sigma \frac{\mu' c'^2}{m c^2}\right) \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = e \left(\frac{d\varrho}{dz}\right)^2,$$

folglich:

81. $$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{e}{m}}}{\sqrt{1 + \Sigma \frac{\mu' c'^2}{m c^2}}} \frac{d\varrho}{dz}.$$

Man leitet daraus, sofern der unter dem Summenzeichen vorkommende Quotient constant ist, gemäss Gl. 76 für die innere Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Mittels ω' den Werth ab:

82. $$\omega'^2 = \frac{e}{m\left(1 + \Sigma \frac{\mu' c'^2}{m c^2}\right)}.$$

Ohwohl nun in Wirklichkeit sowohl die Bewegungen der einzelnen Körpertheilchen als die der einzelnen Aethertheilchen von einander verschieden sein werden, so dürfen wir doch in erster Annäherung von dieser Ungleichförmigkeit absehen, und daher unter M, resp. m die in der unendlich dünnen Schicht neben einander befindlichen, je für sich gleich schwingenden Körper-, resp. Aethermassen verstehen. Bezeichnet man noch ein für allemal das mittlere Verhältniss ihrer Oscillationsgeschwindigkeiten mit a', so dass also $c' = a' c$, so schreibt sich:

83. $$\omega'^2 = \frac{m c^2}{m c^2 + M c'^2} v^2 = \frac{e}{m + a'^2 M}.$$

Wird analog das mittlere Verhältniss der Amplitüden $\left(\frac{A'}{A}\right)$ mit a bezeichnet, so fällt dasselbe für ruhende Mittel, für welche die Schwingungen der Aether- und Körpertheilchen isochron sind, mit a' zusammen: es muss daher als eine das Mittel als solches charakterisirende Constante aufgefasst werden. Für ruhende Mittel gelten also insbesondere die Beziehungen:

83b. $$\omega^2 = \frac{e}{m + a^2 M}, \quad n^2 - 1 = \frac{a^2}{m} M\,^{*}).$$

---

*) Da der Erfahrung zufolge das sogenannte Brechungsvermögen $\frac{n^2-1}{d}$ keineswegs constant ist, so gilt dasselbe von $\frac{a^2}{d}$; das Amplitüdenverhältniss a erscheint sonach als Function der Dichtigkeit.

Wie sich dagegen die Gl. 83 im allgemeinen auf bewegte Mittel anwendet, soll später bei Behandlung der anisotropen Medien erläutert werden; für den einfachen Fall der Isotropie mögen zunächst nachfolgende Entwicklungen hier ihre Stelle finden.

Fassen wir in einem bewegten isotropen Mittel, dessen Bewegungsrichtung mit der Z-Axe als Fortpflanzungsrichtung der Wellen den Winkel ψ bilde, zunächst die Theilchen des ruhenden Aethers in's Auge, so gilt für die einfache Sinusschwingung derselben die Gleichung:

$$\varrho = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right),$$

wo die z von einem festen Punkte O ab gezählt werden. Man leitet daraus die Oscillationsgeschwindigkeit ab:

$$c = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{2\pi A}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Von diesem ruhenden Aether theilen sich aber die Erschütterungen auch den fortschreitenden Körpermolekülen sammt ihren Hüllen mit, und wenn für diese die Abscissen z' von einem derselben als Anfangspunkte ab gezählt werden, so wird das Schwingungsgesetz derselben gleichfalls durch eine Sinussoide von der Form:

$$\varrho' = A' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} - \frac{z'}{\lambda'}\right)$$

gegeben sein. Die Oscillationsgeschwindigkeit derselben wird entsprechend:

$$c' = \frac{2\pi A'}{T'} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T'} - \frac{z'}{\lambda'}\right).$$

Nun behält das Mittel trotz der Translation mehr oder minder seine Durchsichtigkeit; es werden daher nach wie vor diejenigen fortschreitenden und nicht fortschreitenden Theilchen, die der gleichen Welle angehören und die folglich das gleiche z haben, in ihren Schwingungen zusammenstimmen müssen. Das erreicht sich aber in einfacher Weise durch die Annahme:

84. $$c' = a' c,$$

wo a' eine Constante bedeutet, die sowohl von t als von z vollständig unabhängig ist.



Da der Anfangspunkt O' der Abscissen z' bisher unbestimmt blieb, so möge er jetzt dahin fixirt werden, dass derselbe den festen Anfangspunkt O zur Zeit $t = 0$ passirt und mit der Geschwindigkeit $g' = g \cos\psi$ voranschreitet. Man hat dann:

$$z' = z - g't,$$

folglich:

$$c' = \frac{2\pi A'}{T'} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T'} - \frac{z - g't}{\lambda'}\right) = \frac{2\pi A'}{T'} \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T'} + \frac{g'}{\lambda'}\right) t - \frac{z}{\lambda'}\right]$$

Damit nun die Beziehung:

$$c' = a' c$$

$$\frac{A'}{T'} \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T'} + \frac{g'}{\lambda'}\right) t - \frac{z}{\lambda'}\right] = a' \frac{A}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$$

für alle t und alle z ihre Gültigkeit bewahre, dazu ist nothwendig, dass:

$$85. \qquad \frac{A'}{T'} = a' \frac{A}{T}, \quad \frac{1}{T'} + \frac{g'}{\lambda'} = \frac{1}{T}, \quad \lambda' = \lambda.$$

Aus den zwei letzten dieser Bedingungen folgt weiter:

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} - \frac{g'}{\lambda} = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{g}{\omega'} \cos\psi\right)^{*)}$$

unter ω' die Lichtgeschwindigkeit im bewegten Mittel verstanden. Und wird der hieraus gezogene Werth von T' in die erstere eingesetzt, so erhält man für das Verhältniss der Oscillationsgeschwindigkeiten:

$$a' = \frac{A'}{A} \frac{T}{T'} = a\left(1 - \frac{g}{\omega'} \cos\psi\right).$$

Vernachlässigt man in dieser Klammer die Differenz $\omega' - \omega$ als kleine Grösse höherer Ordnung und setzt den so gefundenen Werth von a' in Gl. 83, so ergibt sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

*) Man ersieht zugleich aus dieser Darstellung, dass die ponderablen Moleküle im Innern eines zusammengesetzten Mittels genau demjenigen Schwingungsgesetze folgen, welches Klinkerfues für die Theilchen eines homogenen ruhenden Mittels bei Bewegung des Erschütterungscentrums (vrgl. S. 3) beansprucht. Darnach verliert denn das Doppler'sche Princip, nicht zwar bezüglich der modificirten Schwingungsdauer, wohl aber bezüglich der Wellenlänge seine diesfällige Anwendbarkeit, und Schwingungsdauer und Wellenlänge sind ungleich geändert.

86. $$\omega'^2 = \frac{e}{m + a^2 M\left(1 - \frac{g}{\omega}\cos\psi\right)^2}.$$

Oder wenn durch Umformung $\left(1 - 2\frac{g}{\omega}\cos\psi\right)$ in den Zähler gebracht wird:

$$\omega'^2 = \frac{e}{m + a^2 M}\left(1 + \frac{2a^2 M \frac{g}{\omega}\cos\psi}{m + a^2 M}\right)$$

$$= \omega^2\left(1 + 2g\omega\frac{a^2 M}{e}\cos\psi\right),$$

nnd dazu geben Gl. 80 und 83_b den Werth:

$$\frac{a^2 M}{e} = \frac{n^2 - 1}{v^2}.$$

Sonach erhält man schliesslich:

87. $$\omega' = \omega + gk\cos\psi$$

und damit die theoretische Begründung des von Fresnel aufgefundenen Erfahrungsgesetzes.

2. Die anisotropen Mittel.

Der vorstehenden Behandlnng der isotropen Medien lasse ich die der anisotropen folgen. Seit zuerst Fresnel seinen freilich noch nnvollkommenen Versuch gemacht, die Erscheinnngen der doppelten Brechung mechanisch zu begründen, seitdem hat sich die mathematische Theorie mehr nnd mehr des Gegenstandes bemächtigt. Man ist dabei bezüglich der Molekularthätigkeit der schwingenden Theilchen von den verschiedensten Grundvorstellungen ausgegangen, und die einzige Annahme, die sich dnrch diese Untersuchungen als eine gemeinsame hindnrchzieht, ist die Annahme der Möglichkeit der Coëxistenz longitudinaler nnd transversaler Schwingungen der gleichen Art in dem gleichen Mittel.

Wenn sich trotz der genannten Divergenz für die Geschwindigkeitsfläche der Wellen im Wesentlichen stets das gleiche Gesetz ergab, so darf man schliessen, dass die Entwickelung desselben an die Vertheilung der Molekularkräfte der doppeltbrechenden Mittel gar nicht gebnnden ist, dass vielmehr der blosse Begriff der Anisotropie ausreicht, um aus den gegebenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nach zwei

auf einander senkrechten Richtungen die den intermediären Richtungen entsprechende abzuleiten. Hat ja z. B. auch Fizeau [1]) ohne irgendwelche Berücksichtigung der speciellen Art der molekularen Wärmebewegung aus den drei axialen Ausdehnungscoefficienten die dazwischenliegenden abgeleitet und für die Abhängigkeit derselben von ihrer Orientirung zu den Axen die in der Optik so wohl bekannte Beziehung wiedergefunden.

Während ferner die neueren Untersuchungen die strenge Transversalität, resp. Longitudinalität nur den isotropen Mitteln und insbesondere dem Weltäther zulegen, dagegen für die anisotropen Mittel sogenannte quasitransversale und quasilongitudinale Schwingungen beanspruchen, so darf man meines Erachtens diese letzteren als generell möglich und wahrscheinlich geradezu zum Ausgangspunkt der Entwickelung machen. Denn wenn in einem Mittel zu Seiten einer gegebenen Fortpflanzungsrichtung die volle Symmetrie gestört ist, so wird nicht bloss die Geschwindigkeit der Fortpflanzung eine variable, sondern es wird zu allernächst die Schwingung, sofern sie in gewissen Ebenen geradlinig bleibt, im allgemeinen eine schiefe, und diese Obliquität zur Wellennormale erscheint mindestens als ebenso charakteristisch wie die Differenz der Hauptbrechungsindices.

Ich definire daher die Anisotropie in ihrer allgemeinsten Bedeutung als den Inbegriff der beiden eben genannten Eigenschaften und will von ihm aus versuchen, das Gesetz der Wellengeschwindigkeit in doppeltbrechenden Mitteln zu entwickeln.

Zweckdienlich mögen einige einleitende Bemerkungen über eine bekannte Formel aus der Elasticitätslehre Lamé's [2]) vorausgeschickt werden. Lamé behandelt ein homogenes und isotropes elastisches Mittel von beliebiger Begränzung, in dem sich transversale wie longitudinale Schwingungen mit

1) Compt. rend. T. 66, p. 1008; Pogg. Ann. Bd. 135, S. 376.

2) Lamé, Leçons sur l'Elasticité. — Riemann, Partielle Differentialgleichungen, Braunschweig 1869, S. 201.

gleicher Leichtigkeit bilden und fortpflanzen. Wird in demselben irgendwie das Gleichgewicht gestört, und betrachtet man die in Folge dessen frei werdenden, normal und tangential auf ein Körperelement (im Innern und an der Oberfläche) einwirkenden Kräfte, die dasselbe in seine Ruhelage zurückzuführen streben, so lässt sich das Schwingungsgesetz der einzelnen Punkte der entstehenden Wellen auf die Form bringen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = K\frac{d\vartheta}{dx} + L\Delta_2\xi$$

88.
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = K\frac{d\vartheta}{dy} + L\Delta_2\eta$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = K\frac{d\vartheta}{dz} + L\Delta_2\zeta,$$

wo nämlich ϑ die hydrodynamische Dilatation bedeutet, so dass:

$$\vartheta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

und wo unter Δ_2 das Symbol:

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

verstanden wird; K und L sind die Constanten des Mittels.

Für unseren Zweck erscheint es förderlich, die genannten Differentialgleichungen ohne irgendwelche Inbetrachtnahme der wirkenden Kräfte, also rein formell, aus der Superposition einer entstehenden transversalen und longitudinalen Welle herzuleiten.

Fig. 37.

Sei demzufolge zur Zeit t $AB = \varrho$ (Fig. 37) der Schwingungsausschlag eines Punktes des Mittels, dessen Ruhelage A ist, und der von ebenen Wellen sollicitirt wird, welche sich nach der gegebenen Normalen ON fortpflanzen.

Zerlegt man ϱ parallel und senkrecht zur Normalen in die longitudinale Componente ϱ_1 und in die beiden wieder unter einander senkrechten transversalen Componenten ϱ_2 und ϱ_3, und heissen die bezüglichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω_1 und ω_t, so gelten für die drei Antheile der Bewegung Ausdrücke von der Form:

$$
\begin{aligned}
&\varrho_1 = A_1 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z}{\omega_1} + \delta_1\right)\\
89.\quad &\varrho_2 = A_2 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z}{\omega_t} + \delta_2\right)\\
&\varrho_3 = A_3 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z}{\omega_t} + \delta_3\right),
\end{aligned}
$$

sofern die von aussen her gegebene Schwingungsdauer T allen gemeinsam und die Normale OA durch die Cosinus a_1, b_1, c_1 ihrer Winkel mit den drei Axen bestimmt ist.

Die Schwingungsrichtung ϱ_2 möge analog durch die Cosinus a_2, b_2, c_2 und die Schwingungsrichtung ϱ_3 durch die entsprechenden a_3, b_3. c_3 fixirt werden. Ist endlich der resultirende Ausschlag ϱ selber gegeben durch die Cosinus a', b', c', so erhält man für die Winkel zwischen diesem und seinen Componenten die Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
\cos \varrho\varrho_1 &= a' a_1 + b' b_1 + c' c_1,\\
\cos \varrho\varrho_2 &= a' a_2 + b' b_2 + c' c_2,\\
\cos \varrho\varrho_3 &= a' a_3 + b' b_3 + c' c_3,
\end{aligned}
$$

Wird dagegen ϱ parallel den Coordinatenaxen in die drei anderen Componenten ξ, η, ζ zerlegt, so hat man die Gleichungen:

$$\xi = \varrho a', \quad \eta = \varrho b', \quad \zeta = \varrho c'.$$

Und wenn die hieraus für a', b', c' gezogenen Ausdrücke in vorstehende Gleichungen eingesetzt werden, so sind beide Arten von Componenten mit einander verknüpft durch die folgenden:

$$
\begin{aligned}
&\varrho_1 = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta\\
90.\quad &\varrho_2 = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta\\
&\varrho_3 = a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta.
\end{aligned}
$$

Da andererseits:

$$\varrho^2 = \varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 + \varrho_3{}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

so ergibt die Quadrirung und Addition der Gl. 90 die Bedingung:

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = 1, \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$
$$b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 = 1, \qquad a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0$$
$$c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 = 1, \qquad b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0.$$

Mit Berücksichtigung dieser letzteren lassen sich dann jene Gleichungen auf bekannte Weise dahin umformen, dass man hat:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 \varrho_1 + a_2 \varrho_2 + a_3 \varrho_3 \\ \eta &= b_1 \varrho_1 + b_2 \varrho_2 + b_3 \varrho_3 \\ \zeta &= c_1 \varrho_1 + c_2 \varrho_2 + c_3 \varrho_3. \end{aligned} \tag{91.}$$

Werden nunmehr die Gl. 89 nach t, x, y, z differentiirt, so erhält man der Reihe nach:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \varrho$$

$$\frac{d^2\varrho}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a_1{}^2}{\omega^2}\varrho, \quad \frac{d^2\varrho}{dy^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{b_1{}^2}{\omega^2}\varrho, \quad \frac{d^2\varrho}{dz^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{c_1{}^2}{\omega^2}\varrho$$

$$\frac{d^2\varrho}{dx\,dy} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a_1 b_1}{\omega^2}\varrho, \quad \frac{d^2\varrho}{dx\,dz} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a_1 c_1}{\omega^2}\varrho, \quad \frac{d^2\varrho}{dy\,dz} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{b_1 c_1}{\omega^2}\varrho.$$

Und weiter z. B.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3)$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{a_1}{\omega_1{}^2}\varrho_1 + \frac{a_2}{\omega_1{}^2}\varrho_2 + \frac{a_3}{\omega_1{}^2}\varrho_3\right) a_1{}^2$$

$$\frac{d^2\xi}{dy^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{a_1}{\omega_1{}^2}\varrho_1 + \frac{a_2}{\omega_1{}^2}\varrho_2 + \frac{a_3}{\omega_1{}^2}\varrho_3\right) b_1{}^2 \ldots,$$

folglich mit Berücksichtigung der Gleichung:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\Delta_2 \xi = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{a_1}{\omega_1{}^2}\varrho_1 + \frac{a_2}{\omega_1{}^2}\varrho_2 + \frac{a_3}{\omega_1{}^2}\varrho_3\right).$$

Ferner wird:

$$\frac{d^2\eta}{dx\,dy} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{b_1}{\omega_1{}^2}\varrho_1 + \frac{b_2}{\omega_1{}^2}\varrho_2 + \frac{b_3}{\omega_1{}^2}\varrho_3\right) a_1 b_1$$

$$\frac{d^2\zeta}{dx\,dy} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{c_1}{\omega_1{}^2}\varrho_1 + \frac{c_2}{\omega_1{}^2}\varrho_2 + \frac{c_3}{\omega_1{}^2}\varrho_3\right) a_1 c_1.$$

Berücksichtigt man, dass ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 auf einander senkrecht stehen, foglich die Beziehungen gelten:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$
$$a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$$
$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0,$$

so ergibt die Summation den einfachen Ausdruck:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a_1}{\omega_l^2}\varrho_1.$$

Werden nun die so erhaltenen Beziehungen für $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d\vartheta}{dx}$ und $\Delta_2\xi$ in die erste der zu beweisenden Gl. 88 eingesetzt, so erhält man sofort die Bedingung:

$$a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 = K\frac{a_1}{\omega_l^2}\varrho_1 + L\left(\frac{a_1}{\omega_t^2}\varrho_1 + \frac{a_2}{\omega_t^2}\varrho_2 + \frac{a_3}{\omega_t^2}\varrho_3\right).$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung werden identisch, sobald gesetzt wird:

92. $$K + L = \omega_l^2, \quad L = \omega_t^2.$$

Diese nämliche Interpretation der Grössen K und L entspricht ersichtlich auch den beiden übrigen der Gl. 88, und damit ist die Lamé'sche Formel in ihrer Bedeutung für die weitere Untersuchung genügend klargestellt. Sie gibt den Zusammenhang zwischen der resultirenden beschleunigenden Kraft und den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden als coëxistirend gedachten Wellen und ist hier ohne Inbetrachtziehung der wirkenden Kräfte selbst auf rein formellem Wege gewonnen worden.

Beschränkt man sich auf Mittel von allseitiger unendlich grosser Ausdehnung, so scheint die Natur nur solche mit ausschliesslich longitudinalen oder solche mit ausschliesslich transversalen Schwingungen zu kennen. Den ersteren als den compressiblen entspricht das Gesetz:

93. $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \omega_l^2\frac{d\vartheta}{dx}, \ldots\ldots\ldots$$

den letzteren als den incompressiblen das andere:

94. $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \omega_t^2 \Delta_2\xi, \ldots\ldots\ldots$$

und beiden zugleich:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2\varrho}{dr^2}, \quad r = ax + by + cz.$$

Da übrigens der primitive Anstoss zur Bildung der Wellen stets durch eine äussere Kraft gegeben wird, so ist es vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass dieselbe vorstehenden Gleichungen entsprechend zwar wohl Amplitüde und Schwingungsdauer, nicht aber auch die absolute Parallel-

stellung aller folgenden Ausschläge mit denen der spontanen Quelle zu erzwingen vermag. Können doch nur solche Excursionen derselben sich fortpflanzen, die mit den Schwingungsbedingungen der Theilchen des Mittels im Einklang stehen.

Nach diesen Vorbemerkungen, die sich im Wesentlichen noch auf isotrope Mittel bezogen, wenden wir uns zu den anisotropen. Es wurde schon hervorgehoben, dass in denselben wegen Mangel an Symmetrie um die Wellennormale herum die zur Wirkung kommenden Elasticitätskräfte im allgemeinen einen schiefen Zug ausüben und daher schief liegende Schwingungen veranlassen. Dieselben werden aber nichtsdestoweniger einfache sein können, d. h. ebensowohl dem Gesetze der Sinuscurve folgen wie in den isotropen Mitteln die streng transversalen oder streng longitudinalen. Da nun diese Schwingungen sowohl eine Seitenverschiebung als eine Verdichtung zur Folge haben, und da andererseits die in der Natur vorkommenden anisotropen Mittel sich nur wenig von den isotropen unterscheiden, so liegt wohl der Gedanke nahe, eine gewisse Anwendbarkeit der Lamé'schen Formel auch für die ersteren zu versuchen, und die dazu nöthigen, aber immerhin nur unbeträchtlichen Modificationen derselben festzustellen.

Sei demzufolge:

$$95. \qquad \varrho = \varDelta \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{ax + by + cz}{\omega}\right)$$

das Schwingungsgesetz einer Welle mit obliquen Schwingungen, die sich längs ihrer durch a, b, c gegebenen Normalen mit der Geschwindigkeit ω fortpflanzt. Und bezeichnet man, wie früher, die Cosinus der drei Winkel der Richtung ϱ mit a', b', c', so hat man:

$$\xi = \varrho a', \quad \eta = \varrho b', \quad \zeta = \varrho c'.$$

Ferner entsprechend den früheren Entwickelungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a'\varrho, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 b'\varrho, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 c'\varrho$$

$$\varDelta_2 \xi = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a'}{\omega^2}\varrho, \quad \varDelta_2 \eta = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{b'}{\omega^2}\varrho, \quad \varDelta_2 \zeta = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{c'}{\omega^2}\varrho$$

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{(aa' + bb' + cc')a}{\omega^2}, \quad \frac{d\vartheta}{dy} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{(aa' + bb' + cc')b}{\omega^2}, \ldots$$

Macht man jetzt zum Zweck der Verbindung dieser Ausdrücke einen Ansatz, wie er der Lamé'schen Formel entspricht, setzt also die bezüglichen Glieder z. B. in die erste der Gl. 88, so erhält man, wenn das, was aus den dortigen Constanten K, L wird, mit K', L' bezeichnet wird:

$$a' = \frac{K'}{\omega^2}(aa' + bb' + cc')a + \frac{L'}{\omega^2}a'$$

oder:

$$K'(aa' + bb' + cc')a + (L' - \omega^2)a' = 0.$$

Analoge Beziehungen erhält man mittelst der zweiten und dritten der Gl. 88, in denen die neu entstehenden, selbstverständlich von K', L' verschiedenen Grössen durch K'', L''; K''', L''' bezeichnet werden mögen.

Sonach gelten für Mittel, die wesentlich durch einfache Wellen mit schräg stehenden Schwingungen charakterisirt sind, die acht folgenden Gleichungen, bezüglich Bedingungsgleichungen:

$$96. \quad \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= K' \frac{d\vartheta}{dx} + L' \Delta_2 \xi \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= K'' \frac{d\vartheta}{dy} + L'' \Delta_2 \eta \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= K''' \frac{d\vartheta}{dz} + L''' \Delta_2 \zeta \\ K' \ (aa' + bb' + cc')\, a &+ (L' - \omega^2)\, a' = 0 \\ K'' \ (aa' + bb' + cc')\, b &+ (L'' - \omega^2)\, b' = 0 \\ K''' (aa' + bb' + cc')\, c &+ (L''' - \omega^2)\, c' = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1, \ a'^2 &+ b'^2 + c'^2 = 1. \end{aligned}$$

Da vorläufig der Grad dieser Obliquität der Schwingungen ein unbestimmter bleibt, sofern er bedingt ist durch die Annahmen, die bezüglich des Zusammenhanges der sechs noch willkürlichen Grössen K, L gemacht werden, so umfassen diese Gleichungen neben ganz schräg stehenden Oscillationen auch die sogenannten quasitransversalen und quasilongitudinalen Schwingungen und diese letzteren selbst dann noch, wenn dieselben an die Wellebene oder an die Wellennormale unendlich nahe herangerückt werden. Nennt man daher den Winkel zwischen Schwingungsrichtung und Normale χ', so dass man hat:

$$\cos \chi' = aa' + bb' + cc',$$

so wird im ersteren Falle, bei der optischen Anisotropie, $\cos\chi'$ nahezu $= 0$ und im zweiten, bei der akustischen, nahezu $= 1$.

Was nun die Grössen K, L betrifft, die dem Früheren gemäss als Constanten aufzufassen sind, so ergibt sich ihre eigentliche Bedeutung aus der Erfahrung. Zunächst ist die Aggregation der natürlich vorkommenden anisotropen Mittel derart, dass sich dieselben durch drei auf einander senkrechte Ebenen in gleich geordnete Theile zerlegen lassen. Die Durchschnitte dieser Ebenen, die sogenannten Elasticitäts- oder Symmetrie-Axen, zeichnen sich daher vor allen übrigen Richtungen dadurch aus, dass längs ihnen jedenfalls Wellen von streng transversalen, oder streng longitudinalen Schwingungen sich fortpflanzen.

Unterscheiden wir indess die optische und die akustische Anisotropie.

I. Setzen wir im ersteren Falle in den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} K'\,(aa' + bb' + cc')\,a + (L' - \omega^2)\,a' &= 0 \\ K''(aa' + bb' + cc')\,b + (L'' - \omega^2)\,b' &= 0 \\ K'''(aa' + bb' + cc')\,c + (L''' - \omega^2)\,c' &= 0 \end{aligned} \qquad 97_a.$$

$aa' + bb' + cc' = \cos\chi' = 0$, so hat das zur Folge, dass auch die zweiten Glieder verschwinden, und zwar hat man die nachstehenden, einander entsprechenden Werthe:

$$\begin{aligned} b' = 0,\ c' = 0,\ \omega^2 = L' = \omega^2_1 \\ a' = 0,\ c' = 0,\ \omega^2 = L'' = \omega^2_2 \\ a' = 0,\ b' = 0,\ \omega^2 = L''' = \omega^2_3, \end{aligned}$$

je nachdem nämlich die Schwingung der X-, Y-, oder Z-Axe parallel ist. Dabei erscheint es bemerkenswerth, dass für diese streng transversalen Oscillationen der axialen Richtungen die Constanten K völlig unbestimmt bleiben.

Welches nun auch der Werth von K sein möge, soviel ist einleuchtend, dass der Quotient $\frac{K' - K''}{K}$, $\frac{K' - K'''}{K}$ höchstens eine Grösse von der Ordnung $\frac{L' - L''}{L}$, $\frac{L' - L'''}{L}$ sein wird, sofern ein Verschwinden der letzteren auch das Verschwinden der ersteren zur Folge hat. Werden daher die vorstehenden

Gleichungen zu je zwei durch einander dividirt und alle Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, so erhält man nahezu die Beziehung:

$$\frac{a'}{a}(\omega^2 - \omega_1{}^2) = \frac{b'}{b}(\omega^2 - \omega_2{}^2) = \frac{c'}{c}(\omega^2 - \omega_3{}^2).$$

Damit ferner den Gleichungen:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$$

genügt werde, genügt es zu setzen:

$$a' = \frac{a}{\omega^2 - \omega_1{}^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{(\omega^2 - \omega_1{}^2)^2} + \frac{b^2}{(\omega^2 - \omega_2{}^2)^2} + \frac{c^2}{(\omega^2 - \omega_3{}^2)^2}}}$$

$$b' = \frac{b}{\omega^2 - \omega_2{}^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{(\omega^2 - \omega_1{}^2)^2} + \frac{b^2}{(\omega^2 - \omega_2{}^2)^2} + \frac{c^2}{(\omega^2 - \omega_3{}^2)^2}}}$$

$$c' = \frac{c}{\omega^2 - \omega_3{}^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{(\omega^2 - \omega_1{}^2)^2} + \frac{b^2}{(\omega^2 - \omega_2{}^2)^2} + \frac{c^2}{(\mu^2 - \omega_3{}^2)^2}}}.$$

Folglich kommt angenähert:

$$\frac{a'}{a}(\omega^2 - \omega_1{}^2) = K'(aa' + bb' + cc') = \frac{1}{\sqrt{}},$$

und wenn auch in dem Mittelgliede a', b', c' durch ihre Werthe in a, b, c ersetzt werden:

$$98. \qquad K'\left(\frac{a^2}{\omega^2 - \omega_1{}^2} + \frac{b^2}{\omega^2 - \omega_2{}^2} + \frac{c^2}{\omega^2 - \omega_3{}^2}\right) = 1.$$

Da diese Gleichung unabhängig von dem Grade der Obliquität der Schwingungen gewonnen wurde, so behält sie auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn letztere für jede Richtung der Wellennormale nicht mehr als angenähert, sondern als streng transversal angenommen werden. Damit aber $aa' + bb' + cc' = \cos\chi$ bei jedem beliebigen Werth von a, b, c; a', b', c' verschwinde, dazu ist nothwendig, dass:

$$99. \qquad \frac{1}{K'} = \frac{1}{K''} = \frac{1}{K'''} = 0.$$

In Folge dessen erhält vorstehende Gleichung 98 die definitive Form:

$$100. \quad a^2(\omega^2 - \omega_2{}^2)(\omega^2 - \omega_3{}^2) + b^2(\omega^2 - \omega_1{}^2)(\omega^2 - \omega_3{}^2) + c^2(\omega^2 - \omega_1{}^2)(\omega^2 - \omega_2{}^2) = 0.$$

Sie gibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die einer gegebenen Wellennormale zukommen, wenn die drei sogenannten Hauptbrechungsindices des Mittels bekannt sind. Wegen der

quadratischen Form derselben erhält man deren zwei, und zwar stehen nach Theorie und Erfahrung die zugehörigen Schwingungsrichtungen auf einander senkrecht.

Es ist hier nicht der Ort, genauer auf dieselben einzugehen; für die drei Hauptschnitte speciell sind dieselben durch Gl. 97 festgestellt. Geht man durch Gleichsetzung von $\omega_2{}^2 = \omega_3{}^2$ zu dem einfacheren Fall der sogenannten einaxigen Mittel über und ersetzt a^2 durch $\cos^2\chi$, $b^2 + c^2$ durch $\sin^2\chi$, so sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gegeben durch:

$$100_b. \quad (\omega^2 - \omega_2{}^2 \cos^2\chi - \omega_1{}^2 \sin^2\chi)(\omega^2 - \omega_2{}^2) = 0,$$

und die Schwingungen der einen Welle gehen vor sich im Hauptschnitt, während die der andern senkrecht auf demselben stehen.

II. Um der Vollständigkeit halber auch die akustische Anisotropie kurz zu berücksichtigen, so werde in der ersten der Gleichungen 97_a das Product $K'a'$, in der zweiten $K''b''$ und in der dritten $K'''c'$ sowohl addirt als subtrahirt. Dieselben erhalten dadurch die Form:

$$\begin{aligned} &K' \;[b\,(ab' - a'b) + c\,(ac' - a'c)] + (K' + L' - \omega^2)\,a' = 0 \\ 96_b.\; &K''[-a(ab' - a'b) + c\,(bc' - b'c)] + (K'' + L'' - \omega^2)\,b' = 0 \\ &K'''[-a(ac' - a'c) - b\,(bc' - b'c)] + (K''' + L''' - \omega^2)\,c' = 0. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie nach den drei Axen entsprechen denselben als Wellennormalen streng longitudinale Schwingungen. Die zusammengehörigen Werthe der Cosinus und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind folgende:

$$\begin{aligned} b = 0,\; c = 0 \qquad & \omega^2 = K' + L' = \omega_{,}^2 \\ a = 0,\; c = 0 \qquad & \omega^2 = K'' + L'' = \omega_{,,}^2 \\ a = 0,\; b = 0 \qquad & \omega^2 = K''' + L''' = \omega_{,,,}^2, \end{aligned}$$

je nachdem nämlich Wellennormale und Schwingungsrichtung der X-, Y- oder Z-Axe parallel sind.

Was ferner das Verhältniss der einzelnen Grössen K und und L betrifft, so gelten darüber im allgemeinen die gleichen Bemerkungen wie oben. Auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω erhält man durch gleiche Behandlung der Gl. 97_a und gelangt daher wiederum zur Formel 98, nämlich:

$$\frac{a^2}{\omega^2 - L'} + \frac{b^2}{\omega^2 - L''} + \frac{c^2}{\omega^2 - L'''} = \frac{1}{K'}.$$

Damit dieselbe nicht bloss angenähert, sondern streng gültig sei, dazu ist nothwendig, dass $K' = K'' = K''' = K$. Beachtet man nun, dass für das isotrope Mittel, aus dem man sich durch ungleiche Compression, resp. Dilatation nach drei auf einander senkrechten Richtungen das anisotrope Mittel entstanden denken mag, zufolge Gl. 93 $L' = L'' = L''' = 0$ ist, und dass somit dessen Fortpflanzungsgeschwindigkeit ($= \sqrt{K}$) als mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit des letzteren ($= \omega_0$) aufzufassen ist, so lässt sich schreiben:

$$
101. \quad \begin{aligned} \omega_{,}^2 &= K + L', & \omega_{,,}^2 &= K + L'', & \omega_{,,,}^2 &= K + L''' \\ &= \omega_0^2 (1 + \alpha), & &= \omega_0^2 (1 + \beta), & &= \omega_0^2 (1 + \gamma). \end{aligned}
$$

Mit Rücksicht hierauf schreibt sich vorstehende Gl. auch so:

$$
\frac{a^2}{\omega^2 \left(1 - \alpha \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} + \frac{b^2}{\omega^2 \left(1 - \beta \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} + \frac{c^2}{\omega^2 \left(1 - \gamma \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} = \frac{1}{\omega_0^2}.
$$

Und wenn man in den Klammern wegen der Kleinheit von α, β, γ den Unterschied von ω^2 und ω_0^2 vernachlässigt und die angedeuteten Divisionen ausführt, so erhält man:

$$
102. \qquad \omega^2 = \omega_{,}^2 a^2 + \omega_{,,}^2 b^2 + \omega_{,,,}^2 c^2
$$

als das Gesetz der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Orientirung für die akustische Anisotropie.

Derselben entspricht im allgemeinen eine quasilongitudinale Schwingung, denn würde man in den durch Division der Gl. 97_a erhaltenen Quotienten:

$$
\frac{K' a}{K'' b} = \frac{\omega^2 - L'}{\omega^2 - L''} \frac{a'}{b'}, \quad \frac{K' a}{K''' c} = \frac{\omega^2 - L'}{\omega^2 - L'''} \frac{a'}{c'}
$$

$a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ setzen, so erhielte man neben der Bedingung: $K' = K'' = K'''$ die andere: $L' = L'' = L'''$, die bloss für die Isotropie erfüllbar ist.

Als akustisch anisotropes Mittel dürfte z. B. ein Holzblock zu betrachten sein, dessen Elasticität und sonstige physikalische Eigenschaften sich bekanntlich nach drei auf einander senkrechten Richtungen unterscheiden.

Die hier gegebene Entwickelung der Geschwindigkeitsfläche der Wellen in den anisotropen Mitteln charakterisirt sich, wie man bemerken wird, vor den gewöhnlich üblichen in doppelter Weise. Wurde einerseits die Molekularthätigkeit

der schwingenden Theilchen ganz willkürlich gelassen, so begnügte man sich andererseits nicht mit der Behandlung jenes ideellen Mittels, in dem longitudinale und transversale Schwingungen der gleichen Art neben einander bestehen können, und in dem daher die einzelnen K und L beliebige endliche Werthe haben*). Was insbesondere die optische Anisotropie betrifft, so erinnert das eingeschlagene Verfahren an die Behandlung der Intensität des gespiegelten und gebrochenen Lichtes seitens Cauchy, denn auch dort wird das anfänglich vorausgesetzte ideelle Mittel mit Longitudinalschwingungen hinterher in das reelle natürlich gegebene umgewandelt. Betrachtet man den Aether als incompressible Flüssigkeit und die durchsichtigen Mittel als Aggregate von Körper- und Aethertheilchen, von denen die ersteren durch die Oscillationen der letzteren zum Mitschwingen veranlasst werden, so wird jede longitudinale Lichtwelle illusorisch. Und wenn sich, mathematisch genommen, eine der Normale a, b, c folgende streng transversale Welle im Innern der doppeltbrechenden Mittel nach den Coordinatenaxen als eine Superposition von transversaler und longitudinaler Wellenbewegung projicirt, so rührt das daher, dass z. B. für eine Schwingung, die der XY-Ebene parallel ist, zwar nicht mehr die Gleichungen der Isotropie:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \omega^2\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2}\right), \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \omega^2\left(\frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dx^2}\right),$$

erfüllt werden, wohl aber die gleichfalls der Isotropie angehörige unbestimmtere:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2\varrho}{dr^2}$$

nach wie vor in Kraft bleibt.

Wenn wir nach dieser Abschweifung, in welcher der Zusammenhang der axialen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten mit den intermediären aus der blossen Annahme strengster Transversalität entwickelt wurde, zu unsern früheren Ansichten über den Mechanismus dieser Schwingungen zurückkehren, so wird

*) Boussinesq z. B. setzt:
$K':K'':K''' = L':L'':L''' := (1+a):(1+b):(1+c)$.

das Variable der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in nichts Anderem begründet sein als in einer ungleichen Beweglichkeit der ponderablen Theilchen. Nennen wir denn wieder das nunmehr veränderliche Verhältniss der Amplitüden der benachbarten Körper- und Aethertheilchen a, so wird die letzte Gleichung:

$$(m + a^2 M)\frac{d^2\varrho}{dt^2} = e\frac{d^2\varrho}{dr^2},$$

und es kommt z. B. für die extraordinäre Welle der einaxigen Krystalle gemäss Gl. 100_b:

$$\frac{1}{m + a^2 M} = \frac{\sin^2\chi}{m + a_1^2 M} + \frac{\cos^2\chi}{m + a_2^2 M}, \tag{103}$$

wofern nämlich die axialen Richtungen durch a_1, a_2 charakterisirt sind.

In diesen Gleichungen bedeuten wiederum m, resp. M die Massen der Aether- und Körpertheilchen, die in einer unendlich dünnen, der Wellebene parallelen Schicht des Mittels seitens der Elasticität e in Schwingungen von der Form:

$$\varrho = A\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{\omega}\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

versetzt werden. Wenn übrigens ein gegebener Schwingungszustand sich nicht längs der Normalen, sondern längs einer zu ihr schiefen Richtung, der Richtung des Strahles, im Krystalle erhält und fortpflanzt, so geschieht das unter Bedingungen, die der in Rede stehenden Gleichung fremd sind, und die zu ihr hinzugefügt werden müssen, um den Gang des Lichtes vollständig darzustellen.

Dies vorausgesetzt, wollen wir die Theorie der doppelten Brechung soweit ausdehnen, dass dieselbe neben den ruhenden auch die bewegten anisotropen Mittel umfasst. Ich werde indess der Einfachheit wegen die Betrachtung auf die extraordinäre Welle der einaxigen Krystalle, also auf die Vorgänge im Hauptschnitte derselben, beschränken. Dem entsprechend mögen die beiden Fälle unterschieden werden, dass nämlich Wellennormale und Bewegungsrichtung entweder erstens mit einander zusammenfallen oder zweitens einen beliebigen Winkel bilden.

Bezieht man wieder, wie oben S. 196, ϱ, A, c, T auf die Aethertheilchen, ϱ', A', c', T' auf die benachbarten Körpertheilchen, und nimmt an, dass das mittlere Verhältniss a der Amplitüden bei der Bewegung ungeändert bleibe, so wird mit Rücksichtnahme auf die Erläuterungen der S. 197 aus Gl. 83 ohne Weiteres folgende:

$$104. \qquad \omega'^2 = \frac{e}{m + \left(\frac{A'}{T'}\right)^2 \left(\frac{T}{A}\right)^2 M} = \frac{e}{m + a^2 M \frac{T^2}{T'^2}}.$$

Im ersteren Fall, wenn die Bewegungsrichtung in die Normale hineinfällt, wird offenbar:

$$T' = T\left(1 + \frac{g}{\omega}\right),$$

und so behält für ihn die oben für die isotropen Mittel aufgestellte Gleichung:

$$\omega'^2 = \frac{e}{m + a^2 M \left(1 - \frac{g}{\omega}\right)^2}$$

ihre strenge Gültigkeit. Wie früher erhält man daraus die Beziehung:

$$105_a. \qquad \omega' = \omega + g\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

aber es ist nunmehr $k = 1 - \frac{1}{n^2}$ gebunden an die weitere Gleichung:

$$105_b. \qquad k = k_1 \sin^2\chi + k_2 \cos^2\chi.$$

Dieselben stimmen völlig mit der Erfahrung überein.

Wenn in diesem ersteren Fall der Begriff des Strahles nicht in die Entwickelung einging, so tritt derselbe für den zweiten sofort hervor.

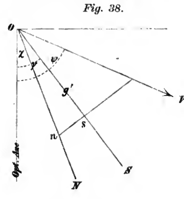
Macht nämlich zweitens die Bewegungsrichtung mit der Normalen einen beliebigen Winkel, so unterscheidet sich das bewegte Mittel vom ruhenden durch die beiden folgenden Punkte. Es tritt einmal in Folge einer besonderen Art von innerer Aberration an die Stelle einer bestimmten Krystallrichtung mit ihrem zugehörigen charakteristischen Amplitüdenverhältniss a eine benachbarte andere in die zu untersuchende feste

Richtnng des Ranmes, nnd ansserdem ändert sich die Schwingungsdauer der in Betracht kommenden Körpertheilchen.

Was zunächst diese letztere betrifft, so ist zu beachten, dass die Lichtschwingnngen sich längs der Richtung des Strahles erhalten und fortpflanzen, und dass, physikalisch genommen, die Wellennormale sich nur als eine Art Hülfsgrösse dem realen Strahle znordnet. Werden daher die Körpertheilchen in der Richtung des Strahles mit der Geschwindigkeit g verschoben, so ist die dadurch bewirkte Aenderung ihrer Schwingungsdauer eine maximale, und wenn dieselben senkrecht zur Richtung des Strahles bewegt werden, so erfolgt eine solche Aenderung überhanpt nicht, und die Schwingungsdauer bleibt die gleiche wie im Zustande der Ruhe.

Werden aber (Fig. 38) die Schichten längs der Richtung des Strahles OS mit der Geschwindigkeit g' transferirt, so wandern die Körpertheilchen dnrch die Normale ON mit der Geschwindigkeit $On = \frac{g'}{\cos(\gamma - \chi)}$ hindurch, und es entstehen in dem Gewebe oder Gerippe derselben gemäss des Doppler'schen Princips Schwingungszustände, deren Periode:

Fig. 38.



$$T' = T\left[1 + \frac{g'}{\omega \cos(\gamma - \chi)}\right]$$

die Richtung der Normale in gleich lange Strecken $\lambda' = \omega' T'$ eintheilt. Und da bezüglich dieser Modification der Schwingungsdauer nur diejenige Bewegnngscomponente zur Geltung kommt, die in die Richtung des Strahles hineinfällt, so erhält man allgemeiner für eine Translation nach OV:

$$106. \qquad T' = T\left[1 + \frac{g}{\omega} \frac{\cos(\psi - \gamma)}{\cos(\gamma - \chi)}\right].$$

Entspricht weiter der Wellennormale ON das Amplitüdenverhältniss (a), so hat man sonach für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

107. $$\omega'^2 = \frac{e}{m + (a)^2 M \left[1 - \frac{g}{\omega} \frac{\cos(\psi - \gamma)}{\cos(\gamma - \chi)}\right]^2}.$$

Nun ist zufolge S. 180:

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \operatorname{tang}\chi,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\operatorname{tang}^2\chi}}, \quad \sin\gamma = \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\operatorname{tang}\chi}{\sqrt{1 + \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\operatorname{tang}^2\chi}},$$

woraus man ableitet:

$$\cos(\psi - \gamma) = \frac{\omega_2^2 \cos\psi \cos\chi + \omega_1^2 \sin\psi \sin\chi}{\sqrt{\omega_2^4 \cos^2\chi + \omega_1^4 \sin^2\chi}}$$

$$\cos(\gamma - \chi) = \frac{\omega_2^2 \cos^2\chi + \omega_1^2 \sin^2\chi}{\sqrt{\omega_2^4 \cos^2\chi + \omega_1^4 \sin^2\chi}}.$$

Es schreibt sich daher auch:

107_b. $$\omega'^2 = \frac{e}{m + (a)^2 M \left[1 - \frac{g}{\omega} \frac{\omega_2^2 \cos\psi \cos\chi + \omega_1^2 \sin\psi \sin\chi}{\omega^2}\right]^2}.$$

Die beiden Gleichungen 107 und 107_b geben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle, deren Normalen das Amplitüdenverhältniss (a) zukommt; sie entsprechen daher der Lichtbewegung längs einer gegebenen Richtung des Raumes, nicht aber der längs derjenigen Krystalllinie, die sich der Welle im ruhenden Mittel als Normale zuordnet, und die durch das Amplitüdenverhältniss a charakterisirt sein möge. Der Zusammenhang zwischen (a) und a ist indess leicht zu ersehen.

Da nämlich die ponderablen Theilchen senkrecht zur Normalen mit einer Geschwindigkeit $g \sin(\psi - \chi)$ von links nach rechts getrieben werden, so erfährt jede Krystalllinie mitsammt allen ihr zukommenden optischen Eigenschaften eine scheinbare Drehung um den Winkel:

108. $$u_1 = \frac{g}{\omega} \sin(\psi - \chi),$$

welcher Winkel füglich mit dem Namen der „innern Aberration der Anisotropie" bezeichnet werden kann, sofern er nur bei letzterer in seiner eigenthümlichen Bedeutung erkannt

wird. Heissen nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die sich im Zustande der Ruhe den Quotienten (a) und a zuordnen, ω'_0 und ω_0, so hat man bekanntlich:

$$\frac{\omega'^2_0}{\omega_0^2} = 1 - 2 \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2} \sin\chi \cos\chi \, \alpha_i$$

oder anch, wenn zur Abkürznng von der Beziehung:

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2} \sin\chi \cos\chi = \operatorname{tang}(\gamma - \chi)$$

Gebrauch gemacht wird:

$$1 - 2\alpha_i \operatorname{tang}(\gamma - \chi) = \frac{m + a^2 M}{m + (a)^2 M},$$

Es leitet sich daraus ab:

$$(a)^2 - a^2 = 2\alpha_i \operatorname{tang}(\gamma - \chi) \frac{m + a^2 M}{M}$$

oder:

$$(a)^2 = a^2 + 2\frac{g}{\omega} \sin(\psi - \chi) \operatorname{tang}(\gamma - \chi) \frac{m + a^2 M}{M}.$$

Wird dieser Werth in Gl. 107 eingeführt, so erhält dieselbe nach Ausführung mehrerer leichter Rednctionen dic Form:

$$109. \quad \omega'^2 = \frac{e}{m\left[1 + 2\frac{g}{\omega}\sin(\psi - \chi)\operatorname{tang}(\gamma - \chi)\right] + a^2 M\left[1 - 2\frac{g}{\omega}\cos(\psi - \chi)\right]}.$$

Würde man den Factor von m in den Zähler schaffen nnd die charakteristischen Geschwindigkeiten des Mittels einführen, so gelangte man zur Gleichung:

$$110. \quad \omega'^2 = \frac{e\left[1 - \frac{g}{\omega}\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2}\sin\chi\cos\chi\sin(\psi - \chi)\right]^2}{m + a^2 M\left[1 - \frac{g}{\omega}\frac{\omega_2^2\cos\psi\cos\chi + \omega_1^2\sin\psi\sin\chi}{\omega^2}\right]^2},$$

deren ursächliche Verschiedenheit von Gl. 107_b ohne Weiteres einleuchtet.

Gehen wir indess zur Relation 109 zurück und nehmen an derselben einige Umformungen vor. Dieselbe schreibt sich zunächst auch so:

$$\omega'^2 = \frac{e}{(m + a^2 M)\left\{1 - 2\,\frac{g}{\omega}\left[\frac{a^2 M}{m + a^2 M}\cos(\psi - \chi) - \frac{m}{m + a^2 M}\,\mathrm{tang}\,(\gamma - \chi)\sin(\psi - \chi)\right]\right\}}.$$

Nun ist:

$$\frac{e}{m + a^2 M} = \omega_0{}^2 = \omega^2, \quad \frac{e}{m} = v^2, \quad \frac{a^2 M}{m + a^2 M} = 1 - \frac{m}{m + a^2 M} = 1 - \frac{\omega^2}{v^2}$$

und:

$$\frac{m}{m + a^2 M}\,\mathrm{tang}\,(\gamma - \chi) = \frac{\omega^2}{v^2}\,\frac{\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2}{\omega^2}\sin\chi\cos\chi.$$

Setzt man diese Ausdrücke ein und führt die angedeutete Division aus, so ergibt sich:

$$\omega'^2 = \omega^2\left\{1 + 2\,\frac{g}{\omega}\left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos(\psi - \chi) - \left(\frac{1}{n_1{}^2} - \frac{1}{n_2{}^2}\right)\sin\chi\cos\chi\sin(\psi - \chi)\right]\right\}.$$

Und weiter:

$$\omega' = \omega + g\left\{(k_2\cos^2\chi + k_1\sin^2\chi)\cos(\psi - \chi) + (k_1 - k_2)\sin\chi\cos\chi\sin(\psi - \psi)\right\}$$

$$= \omega + g\left\{k_2\cos\chi\,[\cos\chi\cos(\psi - \chi) - \sin\chi\sin(\psi - \chi)]\right.$$
$$\left. + k_1\sin\chi\,[\sin\chi\cos(\psi - \chi) + \cos\chi\sin(\psi - \chi)]\right\}.$$

So erhält man schliesslich:

111. $$\omega' = \omega + g\,(k_2\cos\psi\cos\chi + k_1\sin\psi\sin\chi),$$

also dieselbe Form, wie sie oben (S. 175) als Gl. 64_b aus der Erfahrung abgeleitet wurde.

* * *

Stellen wir hiernach die in den acht Abhandlungen behandelten Punkte znsammen, so lassen sich dieselben in folgender Form aussprechen:

1) Das Doppler'sche Princip, das sich nicht bloss auf directes Licht, sondern namentlich anch anf die secnndär leuchtenden Punkte einer bewegten Scheidewand bezieht, ist eine Consequenz der Elementarsätze der Wellenlehre sowie der Gränzbedingungen der Continuität.

2) Ans diesen nnd ans entsprechenden geometrischen Beziehnngen hat sich ergeben, dass bei jeder Spiegelung, Brechung und Bengnng die schliessliche Wellenlänge eine Modification erfährt.

3) Dieser Modification der Wellenlänge geht parallel eine Modification der relativen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, nnd in Folge deren ändern die Strahlen ihre Richtnng.

4) Bei jeder Spiegelung und Brechung bleibt das Verhältniss der relativen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dem Verhältniss der Wellenlängen gleich, nnd gelten ebenso für die Beugnng an bewegter Scheidewand die nämlichen Beziehnngen zwischen den modificirten Wellen wie bei der Rnhe zwischen den unmodificirten.

5) Der Erfahrnng zufolge ist bei der Spiegelung der scheinbare Spiegelungswinkel stets dem scheinbaren Einfallswinkel gleich.

Bei der Brechnng durch ein Prisma bleibt die scheinbare Ablenkung von der Bewegung nnabhängig.

Das Gleiche gilt von dem mittleren Beugungsbilde und von jedem Mittelbilde einer Interferenzerscheinung (bei terrestrischem Lichte auch von den übrigen).

6) Diese Thatsachen als Ergebnisse negativer Versuche führen behnfs ihrer Erklärnng zu einer von der Kugelgestalt abweichenden Geschwindigkeitsfläche der Wellen und dem entsprechend zu einer eigenen Wellenfläche als der Enveloppe jener.

7) Der Erfahrung zufolge ist die scheinbare Richtung des „Strahles“ in einem mit einer brechenden Substanz gefüllten Fernrohr von der Bewegung unabhängig.

8) Den unter 5 und 7 genannten Thatsachen wird übereinstimmend durch die Bedingungsgleichung: $k = \frac{n^2 - 1}{n^2}$ genügt, aber sie alle lassen es dahingestellt, welcher Antheil der Modification der Lichtausbreitung auf eine Veränderung der innern Wellengeschwindigkeit und welcher auf die blosse Entrainirung des Aethers fällt.

9) Zu dem nämlichen Werthe von k führen die erweiterten Gränzbedingungen mit der gleichen Beschränkung.

10) Das zur Einfallsebene parallel schwingende Licht wird sowohl bei der Spiegelung als bei der Brechung anders modificirt wie das zur Einfallsebene senkrecht schwingende.

11) In Folge dessen erfährt nicht bloss die Intensität des Lichtes, sondern auch das Polarisationsazimuth des unter gegebenem Azimuth einfallenden Strahles (gleichgültig, welcher Quelle er entsprungen) eine wahrnehmbare Veränderung. Und so erscheint

12) die Drehung der Polarisationsebene unter dem Einfluss der Erdbewegung geeignet, die schwebende Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes endgültig zu lösen.

13) Der Erfahrung zufolge erfährt auch die extraordinäre Welle der doppeltbrechenden Mittel weder durch Spiegelung noch durch Brechung eine wahrnehmbare Aenderung ihrer Richtung.

14) Der Strahl ferner durchläuft die bewegten durchsichtigen Mittel, anisotrope wie isotrope, in einer und derselben durch die ponderablen Moleküle hindurchlegbaren Röhre, so lange nur bei sonst beliebiger Bewegung der scheinbare äussere Einfallswinkel constant erhalten wird.

15) Sind daher x', y', z' die Coordinaten der Wellenfläche eines Mittels für den Zustand der Ruhe, x, y, z die entsprechenden für den Zustand der Bewegung, und bildet die Bewegungsrichtung mit den Elasticitätsaxen als Coordinatenaxen die Winkel L, M, N, so geht die Gleichung der Wellenfläche des ruhenden Mittels dadurch in die des bewegten über, dass man setzt:

$$x' = x - g k_3 \cos L, \quad y' = y - g k_2 \cos M, \quad z' = z - g k_1 \cos N.$$

16) Man schliesst daraus, dass die Entrainirung Fresnel's als eine Fortschleppung des Schwerpunktes des eingeschlossenen Aethers durch die Fortschreitung einer vermöge des Mitschwingens der ponderablen Theilchen (im Sinne des Doppler'schen Princips) modificirten lebendigen Kraft zu ersetzen ist.

17) Die behandelte neue dioptrische Theorie, die zugleich wegen der Gleichheit des äusseren und des intermolekularen Aethers naturgemäss nur transversale Strahlen zulässt*), erhält sonach durch die Aberrationserscheinungen ihre hauptsächlichste Stütze und ihre volle Bestätigung.

---

*) Ueber die Interpretation der Longitudinalstrahlen vergl. den folgenden Zusatz H.

ZUSATZ H.

Die Gränzbedingungen der Spiegelung und Brechung. Ableitung der Neumann'schen Formel der Krystallreflexion und Interpretation der Cauchy'schen Longitudinalstrahlen.

Die in Abhandlung V gegebene Entwickelung der Intensität des gespiegelten und gebrochenen Lichtes beruht auf der Continuitätstheorie Cauchy's; die erhaltenen Ausdrücke sind daher auch nur insoweit richtig, als man die Voraussetzungen derselben trotz der Nichtexistenz der Longitudinalstrahlen für zulässig hält und ausserdem ihre consequent durchgeführte Erweiterung auf bewegte Mittel ohne Weiteres zugibt. Solange man über das Umsetzen der lebendigen Kraft der Schwingungsbewegung im Innern ruhender und bewegter ponderabler Mittel im Ungewissen bleibt, so lange ist der Cauchy'sche Standpunkt der einzig praktische. Seit indess Boussinesq und in strengerer Weise Sellmeier ihre Ansicht von dem thätigen Mitschwingen der ponderablen Theilchen begründet und die Aberrationserscheinungen, wie die vorstehende Abhandlung dargethan, gerade hierdurch ihre umfassende Erklärung gewonnen, seitdem erscheint es möglich, dem Grundsatze der Erhaltung der lebendigen Kraft eine vollständigere Durchführung zu geben, als es Fresnel und Neumann zu thun vermochten, und dadurch zugleich die Cauchy'schen Longitudinalstrahlen in physikalisch reeller Weise zu interpretiren.

Heissen, wie früher, A_E, A_R, A_D die Amplitüden des einfallenden, gespiegelten und durchgehenden Lichtes, und werden

die Amplitüdenverhältnisse $\frac{A_R}{A_E}$, $\frac{A_D}{A_E}$ mit R, resp. D bezeichnet, so mögen analog C_E, C_R, C_D die entsprechenden maximalen Oscillationsgeschwindigkeiten bedeuten und die Quotienten $\frac{C_R}{C_E}$, $\frac{C_D}{C_E}$ mit $\mathfrak{R}$, resp. $\mathfrak{D}$ bezeichnet werden. Man hat dann wegen der bekannten Beziehung zwischen Amplitüde, Oscillationsgeschwindigkeit und Schwingungsdauer:

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{R} = R\frac{T_E}{T_R}, \quad \mathfrak{D} = D\frac{T_E}{T_D}.$$

Dies vorausgesetzt, betrachten wir eine planparallele Platte, die sich unter dem Winkel ψ zum Lothe abwärts bewegt, und unterscheiden wieder die beiden Fälle, in denen die Schwingungen des einfallenden polarisirten Lichtes erstens senkrecht zur Einfallsebene und zweitens parallel der Einfallsebene Statt haben.

I. Hauptfall. 1. Das Licht werde an der Vorderfläche gespiegelt und gebrochen.

Für ihn erhielten wir S. 112 die Continuitätsgleichung:

$$1 + R = D,$$

und wenn wir in ganz gleichberechtigter Weise anstatt von den Excursionen von den Oscillationsgeschwindigkeiten ausgehen würden, so gesellt sich dazu die andere:

$$1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{D}.$$

Man hat also mit Berücksichtigung der Beziehungen (a) das System der Gleichungen:

$$\text{(b)} \qquad 1 + R = D, \quad 1 + R\frac{T_E}{T_R} = D\frac{T_E}{T_D}$$

und vermag aus ihm mittelst der bekannten, S. 112 gegebenen Verhältnisse der Schwingungsdauern, in denen nunmehr selbstverständlich die Entrainirung $k - k' = 0$ zu setzen ist, R und D einzeln abzuleiten. Für R erhält man beispielsweise den früheren Ausdruck:

$$R = -\frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)}$$

und schliesst daraus, dass die Cauchy'schen Gränzbedingungen mit den vorhin formulirten neuen zusammenfallen.

Anstatt die angedeutete Rechnung auszuführen, ziehe ich es vor, die Gränzbedingungen 32, nämlich:

$$1 + R = D, \quad \frac{\cos\alpha_E}{\lambda_E} + R\frac{\cos\alpha_R}{\lambda_R} = D\frac{\cos\alpha_D}{\lambda_D}$$

durch die beiden folgenden Gleichungen:

$$1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{D}, \quad \frac{\cos\alpha_E}{\lambda_E} + R\frac{\cos\alpha_R}{\lambda_R} = D\frac{\cos\alpha_D}{\lambda_D}$$

zu ersetzen und zu zeigen, dass das Resultat auch in diesem Falle das gleiche wird. Ich gebe indess der letzteren zuvor eine etwas andere Form.

Schreibt man:

$$\alpha_R = 180 - (\alpha + \varDelta), \quad \cos\alpha_R = -\cos(\alpha + \varDelta),$$

so wird dieselbe:

$$1 - R\frac{vT_E}{vT_R}\frac{\cos(\alpha + \varDelta)}{\cos\alpha} = D\frac{v\,T_E}{\omega' T_D}\frac{\cos\alpha_D}{\cos\alpha}$$

oder:

$$1 - \mathfrak{R}\frac{\cos(\alpha + \varDelta)}{\cos\alpha} = \mathfrak{D}\frac{v}{\omega'}\frac{\cos\alpha_D}{\cos\alpha}.$$

Für die linke Seite lässt sich setzen:

$$(1 - \mathfrak{R})\left[1 + \frac{\mathfrak{R}}{1 - \mathfrak{R}}\left(1 - \frac{\cos(\alpha + \varDelta)}{\cos\alpha}\right)\right],$$

so dass kommt:

$$1 - \mathfrak{R} = \mathfrak{D}\frac{v}{\omega'}\frac{\cos\alpha_D}{\cos\alpha}\left(1 - \varDelta\tang\alpha\frac{\mathfrak{R}}{1 - \mathfrak{R}}\right).$$

$\varDelta$ ist bekanntlich gleich dem doppelten scheinbaren Drehungswinkel β der spiegelnden Platte, und wenn in der Klammer für $\frac{\mathfrak{R}}{1 - \mathfrak{R}}$ näherungsweise sein Werth für deu Ruhezustand $-\frac{\sin(e - r)}{2\sin e\cos r}$ eingesetzt und ebenso $\tang e$ statt $\tang\alpha$ geschrieben wird, so wird dieselbe:

$$1 + \beta\frac{\sin(e - r)}{\cos e\cos r} = 1 + \beta(\tang e - \tang r) = \frac{1 - \beta\tang r}{1 - \beta\tang e}.$$

Und so kommt innerhalb der Gränze der zulässigen Vernachlässigungen:

$$\text{(c)} \qquad 1 - \mathfrak{R} = \mathfrak{D}\frac{v}{\omega'}\frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Wir wollen nun die so umgeformte nach Cauchy erhaltene Gleichung mit unserer anderen:

$$\text{(d)} \qquad 1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{D}$$

zum Zwecke der Auflösung nach $\mathfrak{R}$ verbinden. Die Elimination von $\mathfrak{D}$ ergibt zunächst:

$$\mathfrak{R} = \frac{1 - \frac{v}{\omega'} \frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}}{1 + \frac{v}{\omega'} \frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}}.$$

Nun ist:

$$\frac{v}{\omega'} = \frac{\sin e}{\sin r}\left(1 - \frac{g\,k}{\omega}\cos(r - \psi)\right), \quad \beta = 2\frac{g}{v}\sin e \cos\psi,$$

und dazu entwickelt sich leicht mit Benutzung der Ausdrücke 42:

$$\frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos r}{\cos e}\left(1 - \frac{g\,k}{\omega}\sin(r - \psi)\operatorname{tang} r\right).$$

Setzt man diese Werthe ein, so kommt für die maximale Oscillationsgeschwindigkeit der reflectirten Welle:

$$(e_a) \qquad \mathfrak{R} = -\frac{\sin(e - r)}{\sin(e + r)}\left(1 - 2\frac{g}{v}\cos e \cos\psi\right).$$

Und für die Amplitüde erhält man zufolge der Beziehung (a):

$$R = \mathfrak{R}\frac{T_R}{T_E} = \mathfrak{R}\left(1 + 2\frac{g}{v}\cos e \cos\psi\right).$$

Folglich:

$$(e) \qquad R = -\frac{\sin(e - r)}{\sin(e + r)}.$$

Führt so die Verbindung der Gleichung (c) mit jeder der beiden Gleichungen (b) zum gleichen Resultate, so genügen natürlich diese letzteren auch für sich, und es bedarf daher für den betrachteten Specialfall durchaus keiner weiteren Gränzbedingung.

Multiplicirt man die Gleichungen (c) und (d), so kommt:

$$(f) \qquad 1 - \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{D}^2 \frac{v}{\omega'} \frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)},$$

und diese Gleichung, von der ich zeigen werde, dass sie der Fresnel'schen Forderung der Erhaltung der lebendigen Kraft entspricht, lässt sich unabhängig von der erweiterten Continuitätstheorie in folgender Weise entwickeln.

Heissen die während der Zeiteinheit in Bewegung gesetzten Aethermassen für die einfallende, gespiegelte und gebrochene Welle resp. m, m_R, m_D, und bezeichnet man die gleichzeitig schwingende Körpermasse durch M und ihre maximale Oscillationsgeschwindigkeit durch $\mathfrak{D}_1'$ sowie die des

entsprechenden Aethers durch $\mathfrak{D}'$, dann verlangt das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft:

$$m - m_R \mathfrak{R}^2 = m_D \mathfrak{D}'^2 + M \mathfrak{D}_1'^2.$$

Oder wenn das Verhältniss $\frac{\mathfrak{D}'_1}{\mathfrak{D}'} = \frac{A'_D}{A_D} \frac{T_D}{T_D'} = a \frac{T_D}{T_D'}$ gesetzt und die Gleichheit von m und m_R beachtet wird:

$$m(1 - \mathfrak{R}^2) = m_D \mathfrak{D}'^2 \left(1 + a^2 \frac{T_D^2}{T_D'^2} \frac{M}{m_D}\right).$$

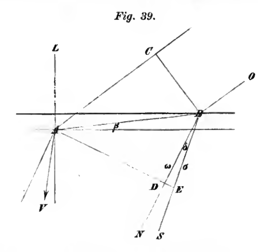
Nun schreibt sich den Ausführungen der letzten Abhandlung zufolge $a^2 \frac{M}{m} = n^2 - 1$, $\frac{T_D'}{T_D} = 1 + \frac{g}{\omega} \cos(r - \psi)$, so dass sich die Klammer auf:

$$1 + (n^2 - 1)\left(1 - 2 \frac{g}{\omega} \cos(r - \psi)\right) = n^2 \left(1 - 2 \frac{gk}{\omega} \cos(r - \psi)\right)$$

reducirt.

Was ferner das Verhältniss der Aethermassen $m : m_D$ betrifft, so folgt die Welle BC (Fig. 39) nach ihrer Umbildung

Fig. 39.



in die gebrochene AE der Richtung des Strahles BE; man hat daher:

$$m : m_D = v \,.\, BC : \omega' \,.\, AE.$$

Es ist aber:

$$AE = AD + DE = AD(1 + \delta \operatorname{tang} r),$$

wofern der Winkel zwischen Strahl BE und Wellennormale BD durch δ bezeichnet wird. So kommt denn:

$$m : m_D = v \,.\, \cos(\alpha + \beta) : \omega' \cos(\alpha_D + \beta)\,(1 + \delta \operatorname{tang} r)$$

$$\frac{m_D}{m} = \frac{1}{n}\,\frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}\left(1 + \frac{gk}{\omega}\cos(r - \psi)\right)(1 + \delta \operatorname{tang} r).$$

Und wenn dieses Verhältniss in die Gleichung der lebendigen Kräfte eingesetzt wird, so erhält diese die Form:

$$(f_b) \qquad 1 - \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{D}'^2 \frac{v}{\omega'}\,\frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}\,(1 + \delta \operatorname{tang} r).$$

Dieselbe unterscheidet sich von Gl. (f) nur durch den letzten Factor und würde ganz mit ihr zusammenfallen, wenn die gebrochene Welle der Richtung der Normalen anstatt der Richtung des Strahles folgte.

Nun repräsentirt aber, $m = 1$ gesetzt, die Gleichung (f) diejenige lebendige Kraft, die dem Continuitätsprincip (b) zufolge in das bewegte Mittel von aussen her übergeht; man muss daher schliessen, dass dieselbe durch die Translation auf die grössere Fläche vertheilt werde, dass also entsprechend die subjective Intensität sich auf:

$$\mathfrak{D}'^2 = \mathfrak{D}^2(1 - \delta \operatorname{tang} r)$$

vermindere.

Für den ersten Hauptfall gelten sonach bei äusserer Spiegelung, resp. Brechung von aussen nach innen sowohl die beiden reinen Continuitätsbedingungen:

$$1 + R = D$$
$$1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{D}$$

als auch die erweiterte Fresnel'sche Combination:

$$1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{D}$$
$$1 - \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{D}^2 \frac{v}{\omega'}\,\frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

2. Betrachten wir nunmehr die an der Hinterfläche der Platte erfolgende Spiegelung und Brechung.

Ich werde dabei diesmal von dem Fresnel'schen Verfahren ausgehen, nämlich die Continuitätsbedingung:

$$1 + \mathfrak{R}_i = \mathfrak{D}_i$$

mit der Gleichung der lebendigen Kräfte verbinden und daraus die Coëxistenz der analogen zweiten Continuitätsbeziehung ableiten.

Die Gleichung der lebendigen Kräfte schreibt sich zunächst:

$$m_D\left(1 + a^2 \frac{M}{m} \frac{T_D^2}{T_D'^2}\right) = m_R \mathfrak{R}_i^2 \left(1 + a^2 \frac{M}{m} \frac{T_R^2}{T_R'^2}\right) + m \mathfrak{D}_i^2$$

oder mit Berücksichtigung des Doppler'schen Princips:

$$m_D n^2 \left(1 - 2\frac{gk}{\omega} \cos(r - \psi)\right) = m_R \mathfrak{R}_i^2 n^2 \left(1 + 2\frac{gk}{\omega} \cos(r + \psi)\right) + m \mathfrak{D}_i^2.$$

Abstrahiren wir wiederum von dem vertheilenden Einfluss der Translation, dann sind die beiden inneren Wellen als der Richtung der Normalen folgend zu denken, und die während der Zeiteinheit in Bewegnng gesetzten Aethermassen verhalten sich wie:

$m_D : m_R : m = \omega'_D \cos(\alpha_D + \beta) : \omega'_R \cos(\alpha_D + \Delta_i - \beta) : v \cos(\alpha + \beta),$ wo nämlich gemäss Gl. 12 (S. 57) der Drehungswinkel der inneren gespiegelten Welle

$$\Delta_i = 2\frac{g}{\omega}(1 - k) \sin r \cos \psi$$

ist.

Die Substitution dieser Verhältnisse sowie die Berücksichtigung der Modificationen der innern Fortpflanzungsgeschwindigkeiten führt sodann zur Gleichung:

$$\text{(g)} \qquad 1 - \mathfrak{R}_i^2 \frac{\omega'_D}{\omega'_R} \frac{\cos(\alpha_D + \Delta_i - \beta)}{\cos(\alpha_D + \beta)} = \mathfrak{D}_i^2 \frac{\omega'_D}{v} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha_D + \beta)}$$

und weiter nach leichten Reductionen zu:

$$1 - \mathfrak{R}_i^2 \left(1 + 2\frac{gk}{\omega} \frac{\cos \psi}{\cos r}\right) = \mathfrak{D}_i^2 \frac{\cos e \sin r}{\sin e \cos r} \left(1 + \frac{gk}{\omega} \frac{\cos \psi}{\cos r}\right).$$

Wegen der ungleichen Massen, die in der einfallenden und in der reflectirten Welle in Bewegung gesetzt werden, weicht der Factor von $\mathfrak{R}_i^2$ von der Einheit ab. Man darf indess näherungsweise schreiben:

$$(g_b) \qquad 1 - \mathfrak{R}_i^2 \doteq \mathfrak{D}_i^2 \frac{\cos e \sin r}{\sin e \cos r} \left[1 + \frac{gk}{\omega} \frac{\cos \psi}{\cos r} \left(1 + \frac{2\mathfrak{R}_i^2}{1 - \mathfrak{R}_i^2}\right)\right]$$

und in der Klammer unter $\mathfrak{R}_i$ seinen für denn Rhezustand als bekannt vorausgesetzten Werth verstehen.

Für den in Rede stehenden ersten Hauptfall ist daher der Werth der zweiten Klammer:

$$\frac{\sin^2(e + r) + \sin^2(e - r)}{\sin(e - r)\sin(e + r)}.$$

Und verbindet man die so definirte Gleichung der lebendigen Kräfte mit der Continuitätsgleichung:

(h) $$1 + \mathfrak{R}_i = \mathfrak{D}_i,$$
so gewinnt man durch Elimination von $\mathfrak{D}_i$ in bekannter Weise die Beziehung:

$$\mathfrak{R}_i = \frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)}\left(1 - \frac{g}{\omega}\frac{\cos\psi}{\cos r}\frac{\sin^2 e\cos^2 r + \cos^2 e\sin^2 r}{\sin^2 e}\right).$$

Ferner hat man für die Amplitüde:

$$R_i = \mathfrak{R}_i\frac{T_R}{T_D} = \mathfrak{R}_i\frac{\omega'_D\sin\alpha'_R}{\omega'_R\sin\alpha_D}$$
$$= \mathfrak{R}_i\left(1 + 2\frac{g}{\omega}\cos r\cos\psi\right),$$

und so kommt nach einigen Reductionen:

$$R_i = \frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)}\left(1 + \frac{g\,k}{\omega}\frac{\cos\psi}{\cos r}\right).$$

Entsprechend erhält man für das durchgehende Licht:

$$\mathfrak{D}_i = \frac{2\sin e\cos r}{\sin(e+r)}\left[1 - \frac{g}{\omega}\frac{\cos\psi\sin(e-r)}{2\sin e}\left(1 + \frac{\cos^2 e\sin^2 r}{\sin^2 e\cos^2 r}\right)\right]$$

und mittelst der Beziehung:

$$D_i = \mathfrak{D}_i\frac{T}{T_D} = \mathfrak{D}_i\frac{\omega_D'}{v}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_D}$$

für die Amplitüde:

(i) $$D_i = \frac{2\sin e\cos r}{\sin(e+r)} + \frac{g\,k}{\omega}\frac{\cos\psi}{\cos r}\frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)}.$$

Schreibt man:

(k) $$R_i = \frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)} + \frac{g\,k}{\omega}\frac{\cos\psi}{\cos r}\frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)},$$

so ersieht man, dass die beiden letzten Gleichungen in der That die Beziehung liefern:

(l) $$1 + R_i = D_i.$$

Es gelten sonach für den ersten Hauptfall und zwar bei innerer Spiegelung, resp. Brechung von innen nach aussen sowohl die beiden reinen Continuitätsbedingungen:

(m) $$1 + R_i = D_i$$
$$1 + \mathfrak{R}_i = \mathfrak{D}_i$$

als auch die erweiterte Fresnel'sche Combination:

(n) $$1 + \mathfrak{R}_i = \mathfrak{D}_i$$
$$1 - \mathfrak{R}_i^2 = \mathfrak{D}_i^2\frac{\cos e\sin r}{\sin e\cos r}\left(1 + \frac{g\,k}{\omega}\frac{\cos\psi}{\cos r}\frac{1+\mathfrak{R}_i^2}{1-\mathfrak{R}_i^2}\right).$$

Für den Schwächungscoefficienten des nach zweimaliger Brechung aus der Hinterfläche der Platte austretenden Strahles ergibt sich endlich:

$$
\text{(o)} \qquad
\begin{aligned}
D D_1 &= \frac{\sin 2e \sin 2r}{\sin^2(e+r)}\left(1+\frac{g\,k}{\omega}\,\frac{\sin(e-r)\cos\psi}{2\sin e\cos^2 r}\right)\\
&= \frac{\sin 2e \sin 2r}{\sin^2(e+r)}\left(1-\frac{g\,k}{\omega}\,\frac{\cos\psi}{\cos r}\,\frac{R}{1-R}\right).
\end{aligned}
$$

Vergleicht man nunmehr die hier erhaltenen Resultate mit denen der früheren Gleichungen 35_b und 44, denen zufolge:

$$R_1 = -R, \; DD_1 = 1 - R^2 = \frac{\sin 2e \sin 2r}{\sin^2(e+r)}$$

sein sollte, so ist zwischen den neuen Gränzgleichungen und den erweiterten Cauchy'schen eine erste Divergenz zu constatiren. Setzt man beispielsweise in Gl. (k) $e = r = \psi = 0$, so dass dieselbe wird:

$$R_1 = \frac{n-1}{n+1}\left(1+\frac{g\,k}{\omega}\right),$$

so rührt das mit dem Aberrationscoefficienten behaftete Glied daher, dass das in der Zeiteinheit in der reflectirten Welle in Bewegung gesetzte Volumen kleiner ist als das in der einfallenden bewegte.

Es lässt sich daher behaupten, dass die erweiterte Cauchy'sche Continuitätstheorie, die das Princip der Erhaltung der Kraft einfach umgeht, hinsichtlich ihrer zweiten Gränzbedingung nur so lange zuverlässig bleibt, als diese letztere dem vorgenannten Princip entspricht.

Wenden wir uns hiernach zum

II. Hauptfall.

1) Das Licht werde an der Vorderfläche gespiegelt und gebrochen. Combiniren wir hier die unter dieser Bedingung erhaltene Gleichung der lebendigen Kräfte (f), nämlich:

$$1 - \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{D}^2 \frac{v}{\omega'} \frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

mit der nach Cauchy für die Transversalstrahlen erhaltenen Gl. 38, nämlich:

$$\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{R}{\sin\alpha_R} = \frac{D}{\sin\alpha_D}\ {}^{*)},$$

*) $-R$ wegen des hier vorausgesetzten Phasenunterschiedes π.

welch letztere sich auch auf die Form bringen lässt:

$$(\mathrm{p}) \qquad 1 - \mathfrak{R} = \mathfrak{D}\frac{v}{w'},$$

so erhält man durch Division:

$$(\mathrm{q}) \qquad 1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{D}\frac{\cos(\alpha_D + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Diese Gleichung entspricht der erweiterten Fresnel'schen Continuitätsbedingung, ist jedoch nicht so einleuchtend wie die analoge für den ersten Hauptfall.

Durch Elimination von $\mathfrak{D}$ erhält man:

$$(\mathrm{r_a}) \qquad \mathfrak{R} = -\frac{\operatorname{tang}(e-r)}{\operatorname{tang}(e+r)}\left(1 - 2\frac{g}{v}\frac{\cos e \cos(2r - \psi)}{\cos(e-r)\cos(e+r)}\right)$$

und für die Amplitüde den complicirteren Ausdruck:

$$(\mathrm{r_b}) \qquad R = -\frac{\operatorname{tang}(e-r)}{\operatorname{tang}(e+r)}\left[1 - 2\frac{g}{v}\cos e\frac{\sin\psi\sin 2r + \cos\psi(\sin^2 e - \sin^2 r)}{\cos(e-r)\cos(e+r)}\right].$$

Derselbe wird insbesondere unter der Incidenz des Polarisationswinkels dem vorstehenden gleich, so dass für $e = p$

$$R = \mathfrak{R}.$$

Was andererseits die in Abhandlung V nach Cauchy erhaltene Gleichung 39 betrifft, so schreibt sich dieselbe näherungsweise auch so:

$$R = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha_D\cos\alpha_D + \operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D)(\sin^2 e - \sin^2 r)}{\sin\alpha_R\cos\alpha_R - \sin\alpha_D\cos\alpha_D + \operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D)(\sin^2 e - \sin^3 r)}\frac{\sin\alpha_R}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha_D\cos\alpha_D}{\sin\alpha_R\cos\alpha_R - \sin\alpha_D\cos\alpha_D}\frac{\sin\alpha_R}{\sin\alpha}\left(1 + \frac{\operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D)\sin 2e}{\cos(e-r)\cos(e+r)}\right).$$

Es wurde dann $\operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D)$ vernachlässigt und die so reducirte Gleichung auf die Form 45, nämlich:

$$R = -\frac{\operatorname{tang}(e-r)}{\operatorname{tang}(e+r)}\left[1 - 2\frac{g}{v}\cos e\frac{\sin\psi\sin 2r - (\sin^2 e + \sin^2 r)\cos\psi}{\cos(e-r)\cos(e+r)}\right]$$

gebracht. Dieselbe stimmt mit der jetzt erhaltenen $(\mathrm{r_b})$ nicht mehr überein, sondern unterscheidet sich von ihr durch den Factor:

$$1 - 4\frac{g}{v}\frac{\cos e\sin^2 e\cos\psi}{\cos(e-r)\cos(e+r)}.$$

Identificiren wir nun diesen mit dem in Abh. V vernachlässigten Factor, so erhält man:

$$\operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D) = -2\frac{g}{v}\sin e\cos\psi = -2\beta.$$

Man kann diese Beziehung folgendermassen interpretiren. Setzt man die Amplitüde R' des an sich unwahrscheinlichen reflectirten Longitudinalstrahles gleich 0, so dass derselbe

aus der Betrachtung überhaupt herausfällt, so reducirt sich $\tang(\alpha'_R + \alpha'_D)$ auf $\tang \alpha'_D$. Es würde dann die Normale der gebrochenen Longitudinalwelle, deren Stösse für den Ruhezustand in der Richtung des Lothes der Eintrittsfläche erfolgen, durch Translation um den doppelten scheinbaren Drehungswinkel dieser Fläche, d. h. um genau gleichviel gedreht wie die Normale der reflectirten Transversalwelle.

Handelt es sich ferner um eine zweimalige Spiegelung, bei der der Strahl schliesslich auf seine ursprüngliche Richtung zurückgebracht wird, so fällt das in (r_b) mit $\cos\psi$ behaftete Glied wegen Zeichenwechsel fort, und die frühere Gleichung 49 bleibt ungeändert bestehen.

Benutzt man endlich die obigen Gleichungen zur Bestimmung von $\mathfrak{D}$, so erhält man:

$$(s) \quad \mathfrak{D} = \frac{2\cos e \sin r}{\sin e \cos e + \sin r \cos r}\left[1 + \frac{g}{v}\tang(e-r)\left(\frac{\cos e}{\sin r}\cos(r-\psi) + \frac{\sin r}{\sin e}\sin(r-\psi)\right)\right].$$

2) Spiegelung und Brechung erfolgen an der **Hinterfläche** der Platte.

Für diesen Specialfall tritt zu der Gl. (g) der lebendigen Kräfte eine der erweiterten Fresnel'schen Continuitätsbedingung (q) analog gebildete Gränzbeziehung, so dass wir nunmehr die Combination haben:

$$(t) \quad \begin{aligned} 1 + \mathfrak{R}_i \frac{\cos(\alpha_D + \Delta_i - \beta)}{\cos(\alpha_D + \beta)} &= \mathfrak{D}_i \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha_D + \beta)} \\ 1 - \mathfrak{R}_i^2 \frac{\omega'_D}{\omega'_R} \frac{\cos(\alpha_D + \Delta_i - \beta)}{\cos(\alpha_D + \beta)} &= \mathfrak{D}_i^2 \frac{\omega'_D}{v} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha_D + \beta)}. \end{aligned}$$

Formt man in ähnlicher Weise, wie oben die zweite, auch die erstere Gleichung um, so schreibt sich auch:

$$1 + \mathfrak{R}_i = \mathfrak{D}_i \frac{\cos e}{\cos r}\left[1 + \frac{g\,k}{\omega}\tang r\left(\sin r \cos\psi \frac{1 - \mathfrak{R}_i}{1 + \mathfrak{R}_i} - \cos r \sin\psi\right)\right]$$

$$1 - \mathfrak{R}_i^2 = \mathfrak{D}_i^2 \frac{\cos e \sin r}{\sin e \cos r}\left(1 + \frac{g\,k}{\omega}\frac{\cos\psi}{\cos r}\frac{1 + \mathfrak{R}_i^2}{1 - \mathfrak{R}_i^2}\right),$$

und man darf unter $\mathfrak{R}_i$ in der Klammer seinen für den Ruhezustand geltenden Werth, also nunmehr:

$$\frac{\sin e \cos e - \sin r \cos r}{\sin e \cos e + \sin r \cos r}$$

verstehen.

Die daraus abzuleitenden Ausdrücke für $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ sind sehr verwickelt; man findet:

$$\text{(u)} \qquad \mathfrak{R}_1 = \frac{\operatorname{tang}(e-r)}{\operatorname{tang}(e+r)}\left\{1 - \frac{g}{\omega}\left[\frac{k\cos\psi}{\cos r} + \frac{(\cos\psi\cos 2r + \sin\psi\sin 2r)\sin^2 2r}{2\sin^2 e\cos r\cos(e-r)\cos(e+r)}\right]\right\}$$

$$\text{(v)} \qquad \mathfrak{D}_1 = \frac{2\sin e\cos r}{\sin e\cos e + \sin r\cos r}\left\{1 - \frac{gk}{\omega}\,\frac{\operatorname{tang} r}{\sin e\cos e + \sin r\cos r}\left[F(\sin e\cos e - \sin r\cos r) + \cos r\cos\psi\,\frac{1+\mathfrak{R}_1^2}{1+\mathfrak{R}_1^2}\right]\right\},$$

wo zu Abkürzung:

$$F = \sin r\cos\psi\,\frac{1-\mathfrak{R}_1}{1+\mathfrak{R}_1} - \cos r\sin\psi$$

gesetzt ist.

Multiplicirt man $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{D}_1$, so ist wegen der Gleichheit der Schwingungsdauer des auf die Vorderfläche auffallenden und des nach zweimaliger Brechung aus der Hinterfläche austretenden Strahles:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 = DD_1,$$

und man erhält nach mannigfachen Reductionen für den gedachten Schwächungscoefficienten schliesslich die verhältnissmässig einfache Beziehung:

$$\text{(w)} \qquad DD_1 = \frac{4\sin 2e\sin 2r}{(\sin 2e + \sin 2r)^2}\left[1 - \frac{gk}{\omega}\,\frac{R}{\cos r}\left(\cos\psi\,\frac{\cos 2r}{1-R} + \sin\psi\sin 2r\right)\right].$$

Im Unterschied von Gl. 46 hat dieselbe ausser einem mit $\sin\psi$ multiplicirten Factor noch ein mit $\cos\psi$ behaftetes Glied. Jener Theil lässt sich auf die Form bringen:

$$\frac{4\sin 2e\sin 2r}{(\sin 2e + \sin 2r)^2}\left[1 - \frac{g}{v}\,\frac{\sin\psi}{\sin e}\,R\,(\cos 2r - \cos 2e)\right]$$

und fällt sonach mit Gl. 46 zusammen. Beide Ausdrücke werden daher in dem Masse differiren, als Bewegungsrichtung und Loth sich einander nähern.

Nachdem wir so die beiden Hauptfälle in detaillirter Weise behandelt, lassen sich die allgemeineren Formeln ohne weiteres hinschreiben.

Ist daher φ das Polarisationsazimuth des einfallenden Strahles, so tritt für den einmal gespiegelten Strahl an die Stelle der Gl. 51 die folgende:

$$\text{(x)} \quad \cot(\varphi_R)_1 = \left\{ \frac{\cos(e+r)}{\cos(e-r)} - 2\,\frac{g}{v}\,\frac{\cos e}{\cos^2(e-r)} \Big[(\sin^2 e - \sin^2 r)\cos\psi + \sin 2r \sin\psi \Big] \right\} \cot\varphi,$$

während bei zweimaliger Reflexion Gleichung 52, nämlich:

$$\text{(y)} \quad \cot(\varphi_R)_2 = \frac{\cos^2(e+r)}{\cos^2(e-r)} \Big[1 - 2\frac{g}{v}\,\frac{\sin\psi}{\sin e}\,\frac{\sin 2e \sin 2r}{\cos(e-r)\cos(e+r)} \Big] \cot\varphi$$

nach wie vor bestehen bleibt.

Für den zweimal gebrochenen Strahl endlich hat man statt der Gl. 50, die für $\psi = 90^0$ ihre Gültigkeit behält, die viel verwickeltere folgende:

$$\text{(z)} \quad \operatorname{tang}\varphi_D = \cos^2(e-r) \left\{ 1 - \frac{gk}{\omega}\,\frac{1}{\cos r} \Big[\cos\psi \Big(\frac{R_s}{1-R_s} - \cos 2r \frac{R_p}{1-R_p} \Big) + \sin\psi \sin 2r\, R_p \Big] \right\} \operatorname{tang}\varphi.$$

Dieselbe geht für die Incidenz des Polarisationswinkels, für welche $R_p = 0$ ist, über in:

$$\operatorname{tang}\varphi_D = \cos^2(e-r) \left(1 - \frac{gk \cos\psi}{\omega \cos r}\,\frac{R_s}{1-R_s} \right) \operatorname{tang}\varphi.$$

Im Uebrigen ist sie unter der Voraussetzung entwickelt, dass $\frac{g}{\omega}\frac{R_p}{1-R_p}$ eine kleine Grösse bleibe, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen.

* * *

Es möge gestattet sein, die Continuitätstheorie Cauchy's in ihrem Verhältniss zu dem bezüglichen Verfahren Fresnel's noch einer kurzen directen Erörterung zu unterziehen, um so wo möglich die physikalische Bedeutung der viel genannten Longitudinalstrahlen zu ergründen.

Bereits oben bei Besprechung des I. Hauptfalles wurde hervorgehoben, dass von den beiden Cauchy'schen Bedingungen (S. 110):

$$\zeta_{\text{I}} = \zeta_{\text{II}}, \quad \frac{d\zeta_{\text{I}}}{dx} = \frac{d\zeta_{\text{II}}}{dx}$$

die letztere nur so lange richtig bleibt, als sie dem von Cauchy umgangenen Princip der lebendigen Kraft Genüge leistet.

Im Folgenden werde ich mich auf den II. Hauptfall und zudem auf ruhende Mittel beschränken.

Cauchy hat seine Theorie zunächst für isotrope Mittel aufgestellt, und es ist mir nicht bekannt, dass er oder irgend einer seiner Nachfolger sie auch auf anisotrope Medien ausgedehnt hätte. Und doch steht, wie ich wenigstens für den Hauptschnitt einaxiger Krystalle zeigen werde, einer solchen Ausdehnung nicht nur nichts im Wege, sondern es lassen sich auch ihre Consequenzen erst von einem so verallgemeinerten Standpunkt aus genügend übersehen.

Andererseits weiss man, dass die Gränzbedingungen Fresnel's wie Neumann's auf die doppeltbrechenden Krystalle angewandt worden, und dass von den erhaltenen Resultaten nur die von Neumann von der Erfahrung bestätigt sind, während dagegen jene andern den berühmt gewordenen Versuchen Seebeck's geradezu widerstreiten.

Um nicht zu weitläufig zu werden, betrachte ich die isotropen Mittel als einen Specialfall der anisotropen und wende mich sofort zu diesen.

1. Erfolgt der Uebergang des Lichtes von aussen her, nämlich vom Weltäther in das Innere eines einaxigen Krystalles, so hat für die im Hauptschnitt vor sich gehende extraordinäre Brechung die Gleichung der lebenden Kräfte die Form:

$$m(1 - R^2) = m_D D^2 + M_D D_M{}^2$$
$$= m_D D^2 \left(1 + a^2 \frac{M_D}{m_D}\right),$$

wenn, wie früher, das Verhältniss der Amplitüden der Körper- und Aethertheilchen mit a bezeichnet wird. Es gilt ferner, ganz unabhängig von der Constitution des ponderablen Gefüges, für dieses Verhältniss die Beziehung:

$$(\alpha) \qquad n^2 - 1 = a^2 \frac{M}{m}.$$

Und so formt sich die Gleichung der lebendigen Kräfte um in:

$$(\beta) \qquad m(1 - R^2) = m_D n^2 D^2,$$

welcher Ausdruck anisotrope wie isotrope Mittel umfasst.

Was ferner das Verhältniss der Aethermassen betrifft, die im einfallenden und gebrochenen Lichte während der gleichen Zeit in Bewegung gesetzt werden, so ist zu beachten, dass letzteres im Krystalle der Richtung des Strahles folgt, und dass daher diese Massen durch die beiden Dreiecke ABC und ABE (Fig. 39), resp. durch ihre beiden auf AB senkrecht stehenden Höhen repräsentirt werden.

Heisst dann der Einfallswinkel e, der Brechungswinkel (= Winkel zwischen Loth und Normale) r, und macht der Strahl σ mit dem Lothe den Winkel r', so hat man:

$$m : m_D = v \,.\, \cos e : \sigma \,.\, \cos r'.$$

Oder wenn noch Strahl und Normale den Winkel δ einschliessen, so dass $\omega = \sigma \cos \delta$:

$$m : m_D = v \cos e : \omega \frac{\cos r'}{\cos \delta}.$$

Das eingesetzt, gibt:

$$(\gamma) \qquad (1 - R^2) \cos e = \frac{v}{\omega} \frac{\cos r'}{\cos \delta} D^2.$$

Dieser Ausdruck, den wir in vollkommener Strenge gemäss der neueren Ansicht über die Constitution der durchsichtigen Mittel entwickelten, stimmt freilich mit dem bezüglichen Fresnel's nicht mehr überein. Wir fügen demselben als zweite Gleichung eine Continuitätsbedingung hinzu und wollen zu dem Zwecke die Cauchy'schen Gleichungen 37 discutiren.

Dieselben schreiben sich in der jetzt gewählten Bezeichnung, wenn noch $\alpha_R = 180^0 - e$ gesetzt wird, wie folgt:

$$(\varepsilon) \quad \begin{aligned} &(1 + R) \sin e + R' \cos \alpha'_R = D \sin r + D' \cos \alpha'_D \\ &(1 - R) \cos e - R' \sin \alpha'_R = D \cos r - D' \sin \alpha'_D \\ &(1 - R) \cos e + R' \frac{\cos^2 \alpha'_R}{\sin \alpha'_R} = D \cos r + D' \frac{\cos^2 \alpha'_D}{\sin \alpha'_D} \\ &(1 + R) \frac{\cos^2 e}{\sin e} - R' \cos \alpha'_R = D \frac{\cos^2 r}{\sin r} - D' \cos \alpha'_D. \end{aligned}$$

Durch Addition, resp. Subtraction leitete man daraus die Gl. 38 ab, nämlich:

$$1 + R = D\,n, \quad \frac{R'}{\sin \alpha'_R} = \frac{D'}{\sin \alpha'_D}.$$

Dass nun in der That das System dieser Beziehungen anch für anisotrope Mittel verwendbar bleibt, unterliegt nm desshalb keinem Zweifel, weil ihre einzige Voraussetzung, das Gesetz der Gleichheit des Verhältniss der Sinus nnd Fortpflanznngsgeschwindigkeiten, anch für doppeltbrechende Mittel besteht. Doppelt- nnd einfach-brechende Mittel werden sich daher nur durch eine verschiedene, aber charakteristische Richtung der longitudinalen Stösse unterscheiden können.

Combinirt man nun die Gleichung:

$$(\zeta) \qquad 1 + R = D \frac{v}{\omega}$$

mit Gl. (γ), so erhält man durch Division:

$$(\eta) \qquad (1 - R) \cos e = D \frac{\cos r'}{\cos \delta},$$

und diese beiden Beziehungen genügen, um R und D getrennt zn erhalten.

Zuvor indess bringe ich Gl. (η) mittelst der Gleichung:

$$r' = r + \delta$$

auf die Form:

$$(1 - R) \cos e = D (\cos r - \sin r \operatorname{tang} \delta)$$

nnd benutze sie zur Reduction der Gl. (ε). Ich anticipire dabei, dass die weiter folgende Behandlung der inneren Spiegelung, resp. Brechung nach aussen keine austretende longitudinale Welle zulässt. Mit Rücksicht darauf mache ich die Annahme, dass analog hier die gespiegelte longitudinale Welle fehlt, d. h. also, dass

$$R' = 0$$

sei. Identificirt man unter dieser Voraussetzung die letzte Gleichung mit der zweiten der Gleichungen (ε), so erhält man die Bedingung:

$$(\vartheta) \qquad D' \sin \alpha'_D = D \sin r \operatorname{tang} \delta.$$

Und setzt man den hieraus gezogenen Ausdruck für D' in die erste der Gl. (ε), so kommt:

$$(1 + R) \sin e = D \sin r \left(1 + \frac{\operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} \alpha'_D}\right),$$

und bei Vergleichung mit:

$$1 + R = D n$$

muss die Bedingung erfüllt sein:

$$(\iota) \qquad \operatorname{tang} \alpha'_D = \frac{\operatorname{tang} \delta}{n^2 - 1}.$$

Folglich wird:

$$D' \sin \alpha'_D = D \sin r \operatorname{tang} \alpha'_D (n^2 - 1)$$

$$(\varkappa) \qquad D' \cos \alpha'_D = D \sin r (n^2 - 1)$$

oder:

$$n^2 - 1 = \frac{D' \cos \alpha'_D}{D \sin r} = \frac{M C^2}{m c^2}.$$

D. h. bei der Spiegelung und Brechung an der Vorderfläche eines Krystalles stellen sich die Erscheinungen so dar, als ob die einfallende Welle in eine gespiegelte Transversalwelle und in eine gebrochene Transversalwelle nebst einer gebrochenen Longitudinalwelle zerfiele, und als ob die nach dem Lothe genommenen Componenten der Amplitüden der beiden letzten zu einander in demselben Verhältniss ständen, in dem sich die eintretende lebendige Kraft auf Aether- und Körpermasse vertheilt.

Endlich ergibt sich für die nach dem Lothe genommenen Componenten der transversalen Aetherbewegung noch die bemerkenswerthe Proportion:

$$(\zeta_b) \qquad (1 + R) \sin e : D \sin r = (m c^2 + M C^2) : m c^2.$$

Nunmehr erhält man mittelst Auflösung der Gleichungen $\zeta\eta$:

$$(\lambda) \qquad D = \frac{2 \sin r \cos e \cos \delta}{\sin e \cos e \cos \delta + \sin r \cos r'},$$

$$(\mu) \qquad R = \frac{1 - \dfrac{\sin r \cos r'}{\sin e \cos e \cos \delta}}{1 + \dfrac{\sin r \cos r'}{\sin e \cos e \cos \delta}}.$$

welche beiden Ausdrücke für $\delta = 0$, $r' = r$ in die bekannten der isotropen Mittel übergehen.

Bevor ich dem letzteren seine übliche Form gebe, hebe ich hervor, dass man denselben unmittelbar aus der Cauchy'schen Gl. 39, nämlich:

$$R = \frac{\cot(e+r) + \operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D)}{\cot(e-r) - \operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D)}$$

ableitet, wenn man $\alpha'_R = 0$ und für tang α'_D seinen in Gl. (ι) gegebenen Werth:

$$\operatorname{tang} \alpha'_D = \frac{\operatorname{tang} \delta}{n^2 - 1} = \frac{\operatorname{tang} \delta \sin^2 r}{\sin^2 e - \sin^2 r}$$

einsetzt. Man erhält so:

$$R = \frac{\sin e \cos e - \sin r \cos r + \sin^2 r \operatorname{tang} \delta}{\sin e \cos e + \sin r \cos r - \sin^2 r \operatorname{tang} \delta}$$

$$= \frac{\sin e \cos e - \sin r \dfrac{\cos r'}{\cos \delta}}{\sin e \cos e + \sin r \dfrac{\cos r'}{\cos \delta}},$$

welcher Werth mit dem obigen übereinstimmt. In der That gestattet ja auch das System der fünf gegebenen Gleichungen über eine der in ihnen vorkommenden sechs Unbekannten, etwa über α'_R, freie Verfügung.

Führt man noch schliesslich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in vorstehende Gleichung ein und setzt $v = 1$, so wird dieselbe:

$$(\nu) \qquad R = \frac{\cos e - \sigma \cos r'}{\cos e + \sigma \cos r'},$$

wo bei Berücksichtigung des Phasenunterschiedes π das Minuszeichen vorzuschieben wäre.

Es ist dies die Neumann'sche Formel [1]), die hinsichtlich der Lage des Polarisationswinkels $e = p$, für welchen:

$$\cos p = \sigma \cos r', \text{ [2])}$$

1) Neumann. Ueber den Einfluss der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichtes und über die Intensität der gebrochenen Strahlen. Berlin 1837.

2) Macht man Gebrauch von der identischen Gleichung:

$$\omega_1^2 \cos^2 \chi + \omega_2^2 \sin^2 \chi = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 \sin^2 \chi \cos^2 \chi + \omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 \sin^2 \chi + \omega_2^2 \cos^2 \chi},$$

die sich wegen:

durch die messenden Versuche Seebecks [1]) bestätigt wurde.

Billet [2]) dagegen verbindet nach Fresnel die für isotrope Mittel geltende Continuitätsgleichung:

$$(1+R)\cos e = D\cos r$$

mit der unter der Hypothese, dass die Dichtigkeit des Krystalläthers bei gleichbleibender Elasticität für die einzelnen Richtungen wie $\frac{1}{\sigma^2}$ variire, abgeleiteten Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2}\sin\chi\cos\chi$$

auch so schreibt:

$$-\frac{\omega_1^2\,\omega_2^2}{\omega^2} + \omega_1^2\cos^2\chi + \omega_2^2\sin^2\chi = \omega^2\operatorname{tang}^2\delta,$$

so lässt sich folgende Umformung vornehmen:

$$\sigma^2\cos^2 r' = \omega^2(\cos r - \sin r\operatorname{tang}\delta)^2$$

$$= \omega^2\cos^2 r - \frac{\omega_1^2\,\omega_2^2}{\omega^2}\sin^2 r + (\omega_1^2\cos^2\chi + \omega_2^2\sin^2\chi)\sin^2 r - 2\,\omega^2\sin r\cos r\operatorname{tang}\delta$$

$$= -\frac{\omega_1^2\,\omega_2^2}{\omega^2}\sin^2 r + \omega_1^2(\sin^2 r\cos^2\chi + \cos^2 r\sin^2\chi) + \omega_2^2(\cos^2 r\cos^2\chi + \sin^2 r\sin^2\chi) - 2(\omega_1^2 - \omega_2^2)\sin r\cos r\sin\chi\cos\chi$$

$$= -\frac{\omega_1^2\,\omega_2^2}{\omega^2}\sin^2 r + \omega_1^2\sin^2(r-\chi) + \omega_2^2\cos^2(r-\chi).$$

$(r-\chi)$ ist der Winkel zwischen optischer Axe und Einfallsloth; er werde durch L bezeichnet. Führt man ausserdem den Einfallswinkel e ein, so hat man einfach:

$$\sigma^2\cos^2 r' = \omega_1^2\sin^2 L + \omega_2^2\cos^2 L - \omega_1^2\,\omega_2^2\sin^2 e.$$

Nun ist für den Polarisationswinkel $(e = p)$:

$$\sigma^2\cos^2 r' = \cos^2 p,$$

folglich:

$$1 - \omega_1^2\sin^2 L - \omega_2^2\cos^2 L = (1 - \omega_1^2\,\omega_2^2)\sin^2 p$$

und definitiv:

$$\sin^2 p = \frac{1-\omega_1^2}{1-\omega_1^2\omega_2^2}\sin^2 L + \frac{1-\omega_2^2}{1-\omega_1^2\omega_2^2}\cos^2 L.$$

Der Polarisationswinkel für eine beliebige Lage der Axe ist sonach mit den Polarisationswinkeln der beiden Specialfälle, dass die Axe mit dem Einfallslothe zusammenfällt oder auf ihm senkrecht steht, durch ein elegantes Theorem verbunden. Die Versuche Seebeck's haben dasselbe bewahrheitet.

1) Pogg. Ann. Bd. 21, 22, 38, 40 (1831—1837).

2) Billet, Traité d'Opt. phys. t. II, p. 164.

$$(1 - R^2) \cos e = D^2 \frac{\cos r'}{\sigma} \quad ^{*)}$$

und gelangt so zu dem Ausdruck:

$$R = -\frac{\cos e \cos r' - \sigma \cos^2 r}{\cos e \cos r' + \sigma \cos^2 r}.$$

Derselbe stimmt hinsichtlich des Polarisationswinkels, für den:

$$\cos p = \sigma \frac{\cos^2 r}{\cos r'}$$

sein sollte, mit der Erfahrung nicht überein.

2. Die Spiegelung und Brechung erfolge an der Hinterfläche der Krystallplatte.

Man hat dann zunächst als Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$m_D D^2 + M_D D_M{}^2 = m_R R_i{}^2 + M_R R_M{}^2 + m D_i{}^2,$$

$$m_D D^2 \left(1 + a_D{}^2 \frac{M_D}{m_D}\right) = m_R R_i{}^2 \left(1 + a_R{}^2 \frac{M_R}{m_R}\right) + m D_i{}^2$$

$$m_D D^2 n_D{}^2 = m_R R_i{}^2 n_R{}^2 + m D_i{}^2.$$

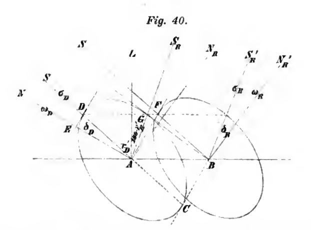
Was übrigens die etwas verwickelte Construction des gespiegelten Strahles und der zugehörigen Welle betrifft, so verfährt man folgendermassen.

Es sei LAB (Fig. 40) die die optische Axe enthaltende Einfallsebene, AB die Projection der Hinterfläche der Platte und SA die Richtung des einfallenden Strahles. Construirt man um A die der Zeiteinheit und der gegebenen Neigung der Axe entsprechende Wellenfläche als Ellipse, zieht im Durchschnittspunkte D derselben mit der Richtung des Strahles die Tangente DE und fällt auf diese vom Mittelpunkte A aus das Perpendikel AN, so gibt dieses die Richtung der Nor-

---

*) Aus einer mir erst beim Drucke dieser Schrift bekannt gewordenen Arbeit Cornu's (Ann. de chim. 4me s. t. XI, p. 283) ersehe ich, dass derselbe diese letztere Annahme dahin modificirt, dass die Dichtigkeit des Krystalläthers der Erfahrung entsprechend wie n^2 oder $\frac{1}{\omega^2}$ $\left(\text{statt } \frac{1}{\sigma^2}\right)$ variiren soll. Seine Gleichung der lebendigen Kräfte wird dadurch mit der unserigen identisch, und so war für die Gewinnung der Neumann'schen Formel der Schlüssel gefunden, der denn auch den Aufschluss derselben bewerkstelligte.

Fig. 40.



male der einfallenden Welle, und die Projection dieser letzteren hat einmal die Lage DE.

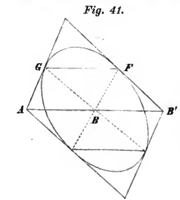
Nach Verlauf der Zeiteinheit gelangt die Welle in die zu DE parallele Lage AF, und construirt man in einem solchen Abstande AB, dass $FB = DA$ wird, um B eine der ersten gleiche und gleich liegende zweite Ellipse, so gibt auch $S'B$ die Richtung des Strahles.

In diesem Moment wird aber Punkt A der Scheidewand Erschütterungsmittelpunkt einer secundären extraordinären Welle und nach ihm alle zwischen A und B liegenden weiteren Punkte. Nach abermaligem Verfluss der Zeiteinheit wird dann Punkt F nach B gelangt sein, und die um A erregten Elementarwelle mit der Ellipse der Figur sich decken. Und zieht man daher von B aus eine Tangente BG an dieselbe, so ist BG die Projection der gespiegelten Welle, ihre Normale AN_R ist die gespiegelte Wellennormale und AS_R der gespiegelte Strahl.

Daraus ergibt sich denn folgende Regel: Man beschreibt um den Einfallspunkt A des einfallenden Strahles SA die entsprechende Wellenfläche, verlängert SA bis C und zieht die Tangente CB. Vom Durchschnittspunkte B dieser Tangente mit der Projection der Trennungsfläche AB construirt man eine zweite Tangente BG und verbindet den Berührungspunkt G mit A. Alsdann ist AG die Richtung des gespiegelten Strahles.

Andererseits lässt sich heweisen, dass die beiden Dreiecke ABF nnd ABG einander gleich sind, also neben gleicher Grundlinie auch gleiche Höhe haben. In der That kommt dieser Beweis darauf hinaus, zu zeigen, dass in dem nm eine Ellipse (Fig. 41) beschriebenen Parallelogramm die Diagonale AB' parallel ist der Verbindungslinie FG der beiden Berührungspunkte F und G, nnd dass sie ansserdem vom Mittelpnnkte B halbirt wird.

Fig. 41.



Der ohen gegebenen Regel füge ich daher noch folgende hinzn: Ist SA (Fig. 40) die Richtung des einfallenden Strahles, so constrnire man um A die Wellenfläche nnd ziehe durch den Schnittpunkt D die znr Trennungsfläche Parallele DG; alsdann ist die Verbindungslinie AG die Richtung des gespiegelten Strahles.

Nun verhalteu sich die in der Gleichung der lebendigen Kräfte vorkommenden, während der gleichen Zeit in Bewegung gesetzten Aethermassen wie die Volumen, d. h. wie:

$$m_D : m_R : m = \sigma_D \cos r'_D : \sigma_R \cos (180 - r'_R) : v \cos e,$$

die heiden ersteren also wie $\triangle AFB : \triangle AGB$. Dieselhen sind einander gleich, und so schreibt sich:

$$\left(\frac{v^2}{\omega^2_D} D^2 - \frac{v^2}{\omega^2_R} R_1^2\right) \sigma_D \cos r'_D = v \cos e \, D_1^2$$

oder:

$$D^2 - \frac{\omega^2_D}{\omega^2_R} R_1^2 = \frac{\omega^2_D}{v \, . \, \sigma_D} \frac{\cos e}{\cos r'_D} D_1^2.$$

Ersetzt man noch σ_D durch $\frac{\omega_D}{\cos \delta_D}$, so erhält die Gleichung der lebendigen Kräfte schliesslich die Form:

$$(\xi) \qquad 1 - \frac{\omega^2_D}{\omega^2_R} R_1^2 = \frac{\omega_D}{v} \frac{\cos e \cos \delta_D}{\cos r'_D} D_1^2,$$

wofern $D = 1$ angenommen, also nnter R_1, D_1 die Schwächungscoefficienten der innern Spiegelung, resp. Brechung nach aussen hin verstanden werden.

Was ferner die zugehörige Continnitätsgleichung betrifft, so lässt sich dieselbe durch Umkehrung der Cauchy'schen Gränzbedingungen 37 gewinnen. Es ist nämlich durch die Vorderfläche eine Superposition einer transversalen (D) und einer longitudinalen (D') Welle in das Innere eingetreten. Dieselbe stösst auf die Hinterfläche und zerfällt an derselben in eine gebrochene Transversalwelle (D_1) und in eine neue Superposition, bestehend aus einer gespiegelten Transversalwelle (R_1) und einer gespiegelten Longitudinalwelle (R_1').

Dem entsprechend schreiben sich die Continuitätsbedingungen, wie folgt:

$$(o)\quad \begin{aligned} &(D \sin r + D' \cos \alpha'_D) + (R_1 \sin r_1 + R_1' \cos \alpha'_R) = D_1 \sin e \\ &(D \cos r - D' \sin \alpha'_D) + (R_1 \cos r_1 - R_1' \sin \alpha'_R) = D_1 \cos e \\ &\left(D \cos r + D' \frac{\cos^2 \alpha'_D}{\sin \alpha'_D}\right) + \left(R_1 \cos r_1 + R_1' \frac{\cos^2 \alpha'_R}{\sin \alpha'_R}\right) = D_1 \cos e \\ &\left(D \frac{\cos^2 r}{\sin r} - D' \cos \alpha'_D\right) + \left(R_1 \frac{\cos^2 r_1}{\sin r_1} - R_1' \cos \alpha'_R\right) = D_1 \frac{\cos^2 e}{\sin e}, \end{aligned}$$

wenn nämlich r_1 statt α_R gesetzt und nunmehr unter α'_R für die innere Spiegelung dasselbe verstanden wird wie früher für die äussere.

Durch Addition der ersten und vierten und durch Subtraction der zweiten und dritten ziehen sich dieselben auf:

$$(\pi)\qquad \frac{D}{\sin r} + \frac{R_1}{\sin r_1} = \frac{D_1}{\sin e}, \quad \frac{D'}{\sin \alpha'_D} + \frac{R_1'}{\sin \alpha'_R} = 0$$

zusammen, und mittelst Elimination von D', D_1 und R'_1 erhält man:

$$R = -\frac{(\sin e \cos e - \sin r \cos r) + \operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D)(\sin^2 e - \sin^2 r)}{(\sin e \cos e - \sin r_1 \cos r_1) + \operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D)(\sin^2 e - \sin^2 r_1)} \frac{\sin r_1}{\sin r},$$

wo wiederum $D = 1$ gesetzt ist.

Führt man dagegen in die erste der Gl. (π) anstatt der Sinus die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ein, so schreibt sich dieselbe auch:

$$(\varrho)\qquad 1 + \frac{\omega_D}{\omega_R} R_1 = \frac{\omega_D}{v} D_1.$$

Sie eignet sich in dieser Form zu einer Combination mit der Gleichung der lebendigen Kräfte, und eine Division beider ergibt:

$$(\sigma)\qquad 1 - \frac{\omega_D}{\omega_R} R_1 = \frac{\cos e \cos \delta_D}{\cos r'_D} D_1.$$

Aus den beiden letzten zieht man:

$$R_1 = -\frac{\sin e \cos e - \sin r \cos r + \sin^2 r \operatorname{tang} \delta_D \sin r_1}{\sin e \cos e + \sin r \cos r - \sin^2 r \operatorname{tang} \delta_D \sin r}$$

oder:

$$(\tau) \qquad \frac{\omega_D}{\omega_R} R_1 = -R.$$

Andererseits erhielte man durch Multiplication der Gl. ζ und ϱ:

$$D D_1 = (1+R)\left(1+\frac{\omega_D}{\omega_R} R_1\right) = 1 - R^2,$$

so dass diese für isotrope Mittel bekannte Beziehung auch für die anisotropen ihre Gültigkeit bewahren würde.

Prüfen wir indess die beiden für R_1 erhaltenen Ausdrücke näher, so ist zu constatiren, dass dieselben keineswegs übereinstimmen. Mit Benutzung der Beziehung:

$$\frac{\omega_D}{\omega_R} = -\frac{\cos r'_R}{\cos \delta_R} \frac{\cos \delta_D}{\cos r'_D}.$$

und bei Erwägung, dass der Figur 40 zufolge δ_D und δ_R entgegengesetztes Zeichen haben, so dass: $r'_R = r_1 - \delta_R$, wenn: $r'_D = r + \delta_D$, lässt sich nämlich der letztere auf die Form bringen:

$$R_1 = -\frac{\sin e \cos e - \sin r \cos r + \sin^2 r \operatorname{tang} \delta_D}{\sin e \cos e - \sin r_1 \cos r_1 - \sin^2 r_1 \operatorname{tang} \delta_R} \frac{\sin r_1}{\sin r},$$

und sollte er mit dem ersteren identisch werden, so müsste sein:

$$\operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D) = \frac{\operatorname{tang} \delta_D}{n^2_D - 1} = -\frac{\operatorname{tang} \delta_R}{n^2_R - 1}.$$

Nun ergab sich bei Behandlung der äusseren Spiegelung und Brechung:

$$(\varphi) \qquad \frac{D' \cos \alpha'_D}{D \sin r} = n^2_D - 1, \quad \frac{D' \sin \alpha'_D}{D \sin r} = \operatorname{tang} \delta_D.$$

Dehnt man diese Beziehungen auf die Superposition der gespiegelten Wellen, die ja auch als eine gebrochene unmittelbar aus einer äusseren Welle abgeleitet werden könnte, aus, so kommt analog:

$$(\chi) \qquad \frac{R_1' \cos \alpha'_R}{R_1 \sin r_1} = n^2_R - 1, \quad \frac{R_1' \sin \alpha'_R}{R_1 \sin r_1} = -\operatorname{tang} \delta_R.$$

Und da sonach:

$$\operatorname{tang} \alpha'_D = \frac{\operatorname{tang} \delta_D}{n^2_D - 1}, \quad \operatorname{tang} \alpha'_R = -\frac{\operatorname{tang} \delta_R}{n^2_R - 1},$$

so wäre nach Cauchy:

$$\text{tang}\,(\alpha'_R + \alpha'_D) = \text{tang}\,\alpha'_R = \text{tang}\,\alpha'_D,$$

was im allgemeinen unmöglich.

Damit fällt denn die Ausdehnung der Cauchy'schen Continuitätsgleichungen auf den in Rede stehenden Fall der inneren Spiegelung und Brechung in sich zusammen. Und so bestätigt sich das früher für bewegte isotrope Mittel erhaltene Resultat hier für ruhende Krystalle.

Auch jetzt sind es wieder die beiden letzten der Continuitätsbedingungen, die verworfen werden müssen, also mittelbar die Gleichungen:

$$\frac{d\xi_I}{dx} = \frac{d\xi_{II}}{dx}, \quad \frac{d\eta_I}{dx} = \frac{d\eta_{II}}{dx}.$$

Was dagegen die beiden ersteren betrifft, so mögen die Ausdrücke (φ) und (χ) in denselben substituirt werden. Es reducirt sich dadurch die erste auf:

$$D\,n_D + R_i\,n_R = D_i$$

oder für $D = 1$:

$$1 + \frac{\omega_D}{\omega_R} R_i = \frac{\omega_D}{v} D_i.$$

Und die zweite wird:

$$D\,(\cos r - \sin r\,\text{tang}\,\delta_D) + R_i\,(\cos r_i + \sin r_i\,\text{tang}\,\delta_R) = D_i \cos e$$

$$(\psi) \qquad D\,\frac{\cos r'_D}{\cos \delta_D} + R_i\,\frac{\cos r'_R}{\cos \delta_R} = D_i \cos e$$

oder auch für $D = 1$:

$$1 - \frac{\omega_D}{\omega_R} R_i = \frac{\cos e \cos \delta_D}{\cos r'_D} D_i.$$

Das Product dieser so umgeformten Gleichungen entspricht dem Princip der Erhaltung der Kraft, und so bleiben denn die Beziehungen:

$$(\omega) \qquad R_i = -\frac{\cos e - \sigma \cos r'}{\cos e + \sigma \cos r'}\,\frac{\sin r_i}{\sin r}$$
$$D D_i = 1 - R^2$$

immerhin bestehen.

Es genügt so neben der Gleichung der lebendigen Kräfte entweder die eine oder die andere der behandelten Gränzgleichungen. Nunmehr lassen sich die erhaltenen Resultate in Kürze folgendermassen aussprechen:

Bei der Spiegelung und Brechung an der Hinterfläche eines Krystalles (sofern dieselbe als rein extraordinär im

Hauptschnitt vor sich geht) lassen sich die Erscheinungen so darstellen, als ob eine Superposition einer Transversal- und Longitudinalwelle einfiele und sich in eine gebrochene Transversalwelle und in eine Superposition einer gespiegelten Transversal- und Longitudinalwelle umsetzte, und als ob die je nach dem Lothe genommenen Componenten der Amplitüden der beiden ersteren sowie der beiden letzteren zu einander in demselben Verhältniss ständen, in dem sich die lebendige Kraft auf Aether- und Körpermasse vertheilt, oder auch, als ob die Quotienten der nach der Trennungsfläche genommenen Componenten der Longitudinal- und der nach dem Lothe genommenen Componenten der Transversalbewegung gleich wären der trigonometrischen Tangente des bezüglichen von Strahl und Wellennormale gebildeten Winkels.

Da sämmtliche für die Vorder- und Hinterfläche des Krystalles erhaltenen Formeln in die bezüglichen der isotropen Mittel übergehen, wenn gesetzt wird:

$$\delta_D = 0, \quad \delta_R = 0,$$

so ersieht man, dass diese letzteren geradezu durch die Beziehung:

$$\operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D) = 0$$

charakterisirt werden.

Es wird daher folgerichtig der von Cauchy mittelst der abweichenden Gleichung:

$$\operatorname{tang}(\alpha'_R + \alpha'_D) = p\sqrt{-1}$$

erhaltene Phasenwechsel und damit die von ihm gegebene theoretische Begründung der elliptischen Polarisation der Spiegelung völlig illusorisch.

Dahingegen ist die berühmte Neumann'sche Formel auf Fresnel's Annahme bezüglich der Lage der Schwingungsebene sowie auf die Theorie des Mitschwingens der ponderablen Theilchen zurückgeführt.

ZUSATZ J.

Aufnahme der Fresnel'schen Theorie.

Wie die Frage nach der Natur des Lichtes überhaupt und vom Standpunkte der Undulationstheorie insbesondere die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes eine doppelte Auffassung erfahren haben, so auch die hier in Rede stehenden Erscheinungen der Aberration. Ich lasse die Erklärungen derselben in historischer Entwickelung einander folgen.

Die Aberration des directen Lichtes wurde im Jahre 1725 von Bradley*), damals Professor der Astronomie in Oxford, entdeckt. In der Absicht, durch Zenithalsterne die so lange gesuchte jährliche Parallaxe dieser Himmelskörper zu finden, begann er mit Molyneux eine Reihe von Beobachtungen. Er fand bald, dass die von ihm beobachteten Sterne alle eine kleine scheinbare Bewegung haben, die aber nicht von einer Parallaxe derselben herrühren könne. Seine erste Muthmassung, dass diese Bewegung durch eine entsprechende der Erdaxe bedingt sei, fand sich nicht bestätigt, da nämlich andere Sterne, die auf der gegenüberstehenden Seite des Poles standen, sich gleich verhielten. Bradley, und Molyneux mit ihm, verfielen dann auf eine andere sonderbare Hypothese, derzufolge die Atmosphäre der Erde nach den Jahreszeiten eine periodische Aenderung erleiden solle, wodurch auch die Refraction geändert würde. Aber sie gaben diesen Einfall bald wieder auf. Im Jahre 1727 nahm Bradley allein seine früheren Beobachtungen mit einem neuen Instrumente zu Wanstead

*) Whewell, Geschichte der inductiven Wissenschaften, übersetzt von v. Littrow, II, 284.

wieder auf und gelangte zunächst zu einigen empirischen Regeln. Auf die wahre Ursache der bezüglichen Erscheinung führte ihn erst der Zufall. Indem er in einem Boote auf der Themse fuhr, bemerkte er, dass die Fahne an der Mastspitze desselben eine von der wahren Richtung des Windes verschiedene Lage annahm, wenn das Boot selbst bald in dieser, bald in jener Richtung segelte. Hierin erkannte er ein treues Abbild seiner Beobachtungen am Himmel, und so blieb ihm nur noch übrig, diese Idee in eine Formel einzukleiden. Er legte dann im Jahre 1729 die gemachte Entdeckung der K. Gesellschaft in London vor und zwar in einer so klaren, treffenden Darstellung, dass seine Erklärung von allen Astronomen sofort als die wahre angenommen wurde.

Die Bradley'sche Begründung der Aberration steht ganz, wie es der damaligen Zeit entsprach, auf dem Boden der Emissionstheorie. Dieselbe erschien als reine optische Täuschung, und solange die Emissionstheorie die herrschende blieb, war man bemüht, das Zustandekommen dieser Täuschung durch möglichst anschauliche und consequent durchgeführte Analogien zu erläutern. Die Einen verlegten den Schwerpunkt ihrer Erklärung in die Vorgänge im Innern des Fernrohrs. So Gauss in seiner „Theoria motus corporum coelestium". Sie verglichen die Bewegung der Erde mit der eines Schiffes, den Lichtstrahl mit der Bahn einer Geschützkugel, die von einem festen Punkte aus gegen dasselbe abgefeuert würde, und das Teleskop mit einem Rohre, das, quer durch den Schiffskörper hindurchgelegt, von der Kugel durchlaufen würde, ohne die Wandungen zu berühren etc. Andere betonten mehr die Vorgänge im Auge. So verglich man (Herrschel) dasselbe mit einem Kasten, bemerkend, dass ein durch eine feine Oeffnung in denselben fallender Sonnenstrahl einen anderen Punkt der gegenüberstehenden Wand treffen muss, wenn dieser Kasten in Bewegung, als wenn er sich in Ruhe befindet.

Auch die weitere Frage, wie sich die Aberrationsconstante eines ganz mit einer Flüssigkeit gefüllten Fernrohres verhalten würde, eine Frage, die zuerst durch Boscovich (1740—1770

Professor der Mathematik in Rom und Pavia, dann nach Paris berufen als Directeur de l'optique de la Marine, von 1783 ab wieder in Italien) angeregt wurde, entschied die Emissionstheorie mittelst der ihr eigenthümlichen Deutung des Snellius-Descartes'schen Brechungsgesetzes dahin, dass dieselbe von der Natur des eingeschobenen Mittels unabhängig sei.

Etwa um das Jahr 1814 machte dann Arago die wichtige Beobachtung*), dass der Brechungsindex des von den Gestirnen auf die Erde gesandten Lichtes anscheinend der nämliche bleibt, die Erde mag sich ihnen nähern oder sich von ihnen entfernen. Er bediente sich dabei eines achromatischen Prisma, und seiner Berechnung zufolge sollte die Ablenkung in einem Fall um nicht weniger als 60 Secunden grösser sein als im andern.

Dieses höchst unerwartete Resultat haben Arago, Biot, Fresnel und Cauchy zu erklären gesucht, die beiden ersteren vom Standpunkte der Emissionstheorie, die beiden letzteren aus den Principien der Undulationstheorie. Arago macht die Annahme: „que les corps lumineux émettent des rayons avec toutes les vitesses possibles et que dans l'ensemble de ces vitesses une seule produit la sensation de lumière, ce qui rend compte aussi de l'égalité de vitesse apparente des rayons de toutes les étoiles.“ Er scheint indess die Schwierigkeiten einer solchen Hypothese nicht verkannt zu haben und wandte sich daher brieflich an Fresnel, um ihn zu einer Prüfung zu veranlassen, ob sich die gedachten Beobachtungen etwa leichter nach dem Vibrationssystem erklären liessen. Fresnel's Antwort (in den Annales de chimie) vom Jahre 1818 ist im Anhang II abgedruckt.

Fresnel beleuchtet zunächst die Erklärung Arago's, die er vom Standpunkt der Emanationstheorie trotz ihrer Schwierigkeiten als nothwendig zugibt. Er fährt dann fort:

„Si l'on admettait que notre globe imprime son mouve-

---

*) Man findet sie auseinandergesetzt in Biot's Traité d'Astron. physique Edit. III, T. III, p. 139, 141.

ment à l'éther dont il est enveloppé, on concevrait aisément ponrquoi le même prisme réfracte toujours la lnmière de la même manière, quelle que soit le côté d'où elle arrive. Mais il paraît impossible d'expliquer l'aberration des étoiles dans cette hypothèse: je n'ai pu jnsqu'à présent du moins concevoir nettement ce phénomène qu'en supposant qne l'éther passe librement au travers dn glohe, et que la vitesse communiquée à ce fluide n'est qu'une petite partie de celle de la terre."

Die beiden hier vorgetragenen Möglichkeiten scheinen indess Arago nicht hefriedigt zu hahen. Derselbe wiederholt [1]) wenigstens 25 Jahre später seine obige Erklärung (im Jahre 1839) hei Gelegenheit eines von Biot gehaltenen Vortrages über Phosphorescenz.

Das veranlasste dann Canchy [2]), nun auch seinerseits mit einer Meinungsänsserung hervorzutreten. Cauchy erklärt sich mit der Ansicht Fresnel's über die Unbeweglichkeit des Aethers und die Durchdringlichkeit der Erde für denselben nicht einverstanden, sondern hält es für natürlich, dass die Erde und die übrigen Himmelskörper eine Aetheratmosphäre mit sich hernmführen. Ja er findet in den Bewegnngen solcher Atmosphären sogar die mögliche Ursache des Zodiakallichtes, des Nordlichtes, des Lichtes der planetarischen Nebel oder selhst der Kometen. Bezüglich des Arago'schen Experimentes sagt Cauchy:

„Par vitesse de la lumière, on peut entendre, dans le système des ondulations, ou la vitesse absolue ou relative avec laquelle cette onde change de position dans la masse de fluide éthéré qu'elle traverse. Or, la seconde de ces deux vitesses sera évidemment celle qui déterminera les réfractions d'un rayon passant de l'air dans le verre, si l'on admet, comme il est naturel de le supposer, que la Terre emporte avec elle dans l'espace, non-seulement son atmosphère aérienne, mais encore une masse considérable de fluide éthéré. Dans cette hypothèse, tous les phénomènes de réflexion et de réfraction ob-

1) Compt. rend. T. VIII, p. 326.
2) Ibidem p. 327.



servés à la surface de la Terre seront les mêmes que si la Terre perdait son mouvement de rotation diurne, et son mouvement annuel de translation autour du Soleil. Ces mouvements ne pourront faire varier que la direction des plans des ondes, par conséquent la direction du rayon lumineux, en produisant, comme l'on sait, le phénomène de l'aberration."

Nach Cauchy's Ansicht, die völlig mit der ersten der von Fresnel hingestellten Möglichkeiten übereinstimmt, erscheint sonach die Aberration des directen Lichtes nicht mehr als reine optische Täuschung, wie die Emanationstheorie und wie auch Fresnel dieselbe definiren, sondern als eine eigenthümliche Drehung der Wellennormale, also als Resultat einer gewissermassen „motorischen" Brechung. Die Bemerkungen Cauchy's waren, wie gesagt, gelegentlich geäussert, und daher sah er sich veranlasst, ihnen in den Compt. rend. das nachfolgende Postscriptum hinzuzufügen:

„Une lettre adressée à M. Arago, et insérée dans les Annales de Physique et de Chimie, m'apprend que l'hypothèse ci-dessus proposée s'était présentée à l'esprit de Fresnel. De plus, après avoir entendu la lecture de la présente Note, M. Savary m'a dit avoir songé à déduire de la même hypothèse une grande partie des conséquences que j'ai indiquée. Mais les difficultés que l'on rencontre, quand on veut en tirer l'aberration par des calculs précis, avaient détourné l'un et l'autre de l'hypothèse dont il s'agit. Toutefois ces difficultés ne paraîtront peut-être pas suffisantes pour qu'on doive l'abandonner, surtout si l'on observe combien elle est conforme à toutes les analogies."

Und da diese Analogien dann weiter ausgeführt werden, so sieht man, dass Cauchy bei seiner früheren Ansicht beharrt und sich lieber die erwähnten Schwierigkeiten bei der Erklärung der Aberration will gefallen lassen, als dass er die nothgedrungenen Voraussetzungen Fresnel's hinnähme.

„Mehrere Jahre", schreibt 1843 Doppler *), „sind, seit

*) Abhandlungen der K. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Fünfte Folge. Bd. III, p. 763.

jene Worte gesprochen wurden, vorübergezogen, und gross ist die Zahl derjenigen Arbeiten, mit denen jener ausgezeichnete Gelehrte vorzugsweise die Undulationslehre bereicherte. Vergeblich aber sieht man sich in seinen zahlreichen Schriften nach einer weiteren Begründung dieser Behauptung, oder kurz nach einer sofortigen Erklärung des oft genannten Phänomens der Aberration um."

So bleiben denn auf dem Gebiete der Undulationstheorie die Ansichten Fresnel's und Cauchy's in schroffem Gegensatze einander gegenüberstehen. Zwar strebte Babinet[1]) im Jahre 1840 durch einen neuen Versuch die Entscheidung herbeizuführen, indess fand sich derselbe irrthümlicher Weise bewogen, das erlangte Resultat zu Ungunsten der Fresnel'schen Anschauung zu interpretiren.

Doppler führt in einer Anmerkung zu seiner Schrift „über das farbige Licht der Doppelsterne etc." das Phänomen der Aberration als eine bisher noch völlig unerklärte und mit den Grundlehren der gegenwärtigen Vibrationshypothese schwer in Einklang zu bringende Erscheinung auf, und diese Behauptung sucht er[2]) dadurch zu erhärten, dass er sämmtliche nur irgend vorgebrachte Erklärungsversuche — vier — eingehend beleuchtet, neue Gegengründe geltend macht und sie dann einzeln als unmöglich verwirft. Zu dieser Abhandlung bemerkt der Referent der Berliner Berichte[3]), dass es unnöthig sein dürfte, diese Gegengründe anzuführen, da die Unzulänglichkeit jener Erklärungen jetzt allgemein anerkannt sei.

Während auch für die nächste Folgezeit der Fresnel'schen Ansicht von der Unbeweglichkeit des Aethers die Anerkennung versagt blieb, fand die Meinung Cauchy's einen Vertreter in Stokes[4]). Derselbe hat (1850) die Aberration des directen Lichtes mathematisch behandelt, und ich habe

---

1) Compt. rend. T. IX, p. 774. Vergl. S. 77.

2) Abh. d. Böhm. Ges. l. c. S. 749.

3) Berl. Ber. über d. Fortschritte d. Physik, Jahrg. II, S. 581.

4) Phil. Mag. XXVII, 9.



es nicht unterlassen wollen, die Hauptgedanken dieser Entwickelung in einer Anmerkung*) dem Texte zuzufügen.

---

*) Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes einer ebenen Welle, welche von einem Stern aus erregt ist, ferner seien u, v, w die mit den Coordinatenaxen parallelen Componenten der Translationsgeschwindigkeit des Aethers, also einer Geschwindigkeit, welche in der Nähe der Erdoberfläche wegen der verhältnissmässig kleinen Rotationsgeschwindigkeit der Erde mit der fortschreitenden Geschwindigkeit derselben an Grösse übereinstimmend gedacht werden darf. Ueberdies stelle V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ruhenden Aether vor, und die Axe der Z falle nahezu mit der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes zusammen. Alsdann lässt sich:

(a) $$z = C + Vt + f(x, y, t)$$

setzen, wo C eine Constante und das Zeichen f eine Function bedeutet, die von sehr geringem Werthe ist. Zur Zeit $t + dt$ wird demnach für den entsprechenden Punkt der fortgeschrittenen Welle, dem der gleiche Schwingungszustand zukommt, und dessen Coordinaten $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$ sein mögen:

(b) $$z' = C + V(t + dt) + f(x + dx,\ y + dy,\ t + dt).$$

Man erhält so:

(c) $$z' - z = Vdt + f(x + dx,\ y + dy,\ t + dt) - f(x, y, t).$$

Andererseits hat man, wenn α, β, γ die Winkel zwischen der Normalen der zu (a) gehörigen Wellebene bedeuten:

(d) $$\begin{aligned} x' &= x + (u + V\cos\alpha)\,dt \\ y' &= y + (v + V\cos\beta)\,dt \\ z' &= z + (w + V\cos\gamma)\,dt. \end{aligned}$$

Entwickelt man die in (c) vorkommende Functionendifferenz nach dem Taylor'schen Lehrsatz und beachtet, dass nahezu $\cos\gamma = 1$ ist, so ergibt sich aus der Vergleichung von (c) mit der letzten der Gleichungen (d):

$$Vdt + \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dt}dt = (V + w)\,dt$$

$$\left(\frac{df}{dt} - w\right)dt + \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0.$$

Es ist ferner: $\frac{df}{dx} = -\cos\alpha$, $\frac{df}{dy} = -\cos\beta$ und daher mit Berücksichtigung der Gleichungen (d):

$$\left(\frac{df}{dt} - w\right) - \cos\alpha\,(u + V\cos\alpha) - \cos\beta\,(v + V\cos\beta) = 0$$

und schliesslich wegen:

Die Hauptschwierigkeit derselben liegt wohl in der Begründung der Annahme, dass der dort vorkommende Aus-

---

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \cos^2\gamma$$

nahezu:

$$\frac{df}{dt} - w = u\cos\alpha + v\cos\beta.$$

Stokes vernachlässigt die Glieder rechter Hand, so dass kommt: $w = \frac{df}{dt}$, also $f = \int w\,dt$, oder da nahezu $V = \frac{dz}{dt}$ ist:

$$f = \frac{1}{V}\int w\,dz.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach x, resp. y, so erhält man:

$$\frac{df}{dx} = -\cos\alpha = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{V}\int\frac{dw}{dx}dz,$$

wofür sich in erster Annäherung auch schreibt:

$$\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{V}\int\frac{dw}{dx}dz$$

und analog:

$$\beta - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{V}\int\frac{dw}{dy}dz.$$

Macht man nun die Voraussetzung, dass:

(e) $$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

ein genaues Differential, dass also:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{du}{dz},\quad \frac{dw}{dy} = \frac{dv}{dz}$$

ist, dann lassen sich obige Integrationen ausführen, und wenn durch die Indices 1 und 2 die Werthe an der ersten und zweiten Gränze bezeichnet werden, so kommt:

(f) $$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{u_2 - u_1}{V},\quad \beta_2 - \beta_1 = \frac{v_2 - v_1}{V}.$$

Wenn die Bedingung, dass $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ ein vollständiges Differential ist, für eine Lage der Coordinatenaxen erfüllt ist, dann ist das auch bei jeder andern Lage derselben der Fall, und das in (f) ausgesprochene Gesetz gilt daher unter dieser Voraussetzung für jede Richtung der Lichtstrahlen.

Entspricht die erste Gränze der Integration einem Punkte, wo die Bewegung der Erde nicht mehr merklich auf den Aether wirkt, und die zweite Gränze einem Punkte, wo die Bewegung des Aethers die fortschreitende Geschwindigkeit der Erde angenommen hat, und denkt man sich die Ebene der XZ mit der Richtung der letzteren parallel, so hat man $u_1 = v_1 = v_2 = 0$, und die Gleichungen (f) liefern:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{u_2}{V},\ \beta_2 - \beta_1 = 0.$$

Sie sprechen also vollständig das durch die Erfahrung gewonnene Aberrationsgesetz aus. (Nach den Berl. Ber. Jahrg. II.)

drnck (e), nämlich: $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential sei. Stokes hat diese Unterstellung in einem besonderen Aufsatze [1]) zu motiviren gesucht und zwar in folgender Weise:

Man wird den Aether, sagt er, in Bezng auf die ihm von der Erde mitgetheilte Bewegnng, deren Geschwindigkeit so ansserordentlich viel geringer ist als die des Lichtes, als eine unzusammendrückbare Flüssigkeit betrachten können. Die drei ersten Integrale der von Cauchy aufgestellten hydrodynamischen Gleichungen führen aber auf den Schlnss, dass Ausdruck (e) für die Bewegung, in welche eine incompressible Flüssigkeit durch die Bewegung eines festen Körpers versetzt wird, ein vollständiges Differential ist. Das wird also auch für die durch die Erde veranlasste Aetherbewegnng der Fall sein. Die hydrodynamischen Formeln beziehen sich zwar nur auf den ersten Moment nach der Störnng des Gleichgewichtes, indem sich aus ihnen folgern lässt, dass sogleich wieder Ruhe eintreten wird, sobald der feste Körper sich zu bewegen aufhört. Für die ganze Dauer der Bewegung würde also jene Folgernng nur gezogen werden dürfen, wenn dieselbe der Art ist, dass die in einem Momente erregte Bewegnng im nächsten wieder verschwunden ist. Stokes nimmt das nun gerade vom Aether an, sofern sich jede in demselben hervorgerufene Bewegung sogleich mit der Geschwindigkeit des Lichtes fortpflanze nnd daher der ans früheren Momenten herstammende Theil derselben sofort als verschwnnden betrachtet werden dürfe.

Aus den verschiedenartigen Deductionen, die man so für das Aberrationsgesetz aufgestellt hat, geht wohl zur Genüge hervor, dass die Erklärung desselben nicht unabhängig ist von jeder Hypothese über das Licht. Challis [2]) freilich war anderer Meinung, aber er gerieth darüber mit Stokes in einen längeren Streit, in den auch Baden Powell [3]) einmal eingriff.

1) Phil. Mag. XXIX, 6.
2) Ibidem XXVII, 321.
3) Ibidem XXIX, 425.

Ob nun die Stokes'sche Entwickelung wirklich allseitig befriedigt, das zu entscheiden überlasse ich dem Leser. Stokes selbst sah sich veranlasst, auch die Theorie Fresnel's einer näheren Prüfung zu unterwerfen. Er beweist [1]), sagt der Referent der „Fortschritte der Physik", dem ich auch hier noch folgen muss, auf mathematischem Wege, dass Fresnel's Ansicht mit der Erfahrung nicht im Widerspruch steht, und dass die Gesetze der Reflexion und Refraction in einfach brechenden Mitteln von der Erdbewegung unabhängig sind. Ferner zeigt er, dass auch Babinet's Interferenzversuch, welcher gegen die Fresnel'sche Theorie zu sprechen scheint, mit derselben in vollem Einklang steht. Stokes will indess damit nicht die Meinung aussprechen, dass er diese Ansicht wegen der Uebereinstimmung ihrer Consequenzen mit der Erfahrung billige.

Um dieselbe Zeit suchte Doppler [2]), der mit der Aufstellung des nach ihm benannten Princips bereits einen glücklichen Wurf gethan hatte, nun auch auf dem Gebiete der eigentlichen Aberrationslehre die bisherigen Gränzen zu erweitern. Es wird nämlich auf die Ablenkung aufmerksam gemacht, welche Schall- und Lichtstrahlen erfahren sollen, wenn sie aus einem ruhenden Medium kommend durch ein bewegtes Medium hindurchgehen, und dabei derjenige Fall näher besprochen, in welchem die Bewegung eine Rotation um eine feste Axe ist. Im Uebrigen ist dieser Aufsatz voll von kühnen und willkürlichen Hypothesen. In einer weiteren Abhandlung [3]) beschäftigt sich Doppler dann noch mit den Strömungen des Aethers und mit ihrem Einfluss auf die optischen Phänomene. Er beschränkt sich indess auf einen speciellen Fall, sofern er nicht partielle, sondern eine allgemeine Strömung von constanter Geschwindigkeit voraussetzt.

Das Doppler'sche Princip wurde bekanntlich 1845 zuerst von Buijs Ballot [4]) bezüglich seiner akustischen Geltung

1) Phil. Mag. XXVIII, 76. Mir nicht zugänglich.
2) Abh. d. Böhm. Ges. 5. Folge. III, 417.
3) Ebendaselbst IV, 508 und 514.
4) Pogg. Ann. Bd. 66, S. 321.

bestätigt. Derselbe steht offenbar noch nnter dem Eindruck dieser Versuche, wenn er bezüglich des Experimentes von Arago die von Letzterem gegebene Erklärung (S. 248) in die Sprache der Undulationstheorie übersetzt und sie folgendermassen interpretirt. „Wenn man bedenkt“, sagt B. Ballot, „dass es im freien Aether nur Eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit geben kann, so muss man annehmen, dass die Gestirne Wellen von unendlich verschiedener Oscillationsgeschwindigkeit (i. e. Schwingungsdauer) aussenden, und dass von der Gesammtheit dieser Oscillationsgeschwindigkeiten nur diejenigen die Empfindung des Lichtes und einer bestimmten Farbe erregen, welche wir als solche im Sonnenspectrum haben kennen gelernt. Sind dann auch die Strahlen, welche bei relativer Ruhe der Erde sichtbar waren, in Folge der Bewegung mehr oder weniger abgelenkt als früher, so ist doch auch zugleich die Oscillationsgeschwindigkeit eine andere geworden: sie haben dadurch ihre Farbe geändert, und andere früher unsichtbare Strahlen haben ihre Stelle und Natur genau ein- und angenommen.“ Einer Widerlegung dieser Ansicht bedarf es wohl nicht mehr. Ballot nennt die Erklärung, die Fresnel gegeben, eine nicht haltbare, und gegen die Erklärung Cauchy's macht er eine Einwendung, die wohl auf ein Missverständniss zurückzuführen ist.

So standen die Verhältnisse, als plötzlich (1850) das berühmte Experiment Fizeau's, durch den die „Entrainirung“ des Aethers seitens eines bewegten durchsichtigen Mittels thatsächlich bewiesen wurde, in dieses Chaos Licht brachte und nunmehr der Fresnel'schen Ansicht eine festere Grundlage und damit neue Anhänger erwarb. Zwar wäre zu wünschen, dass dieser Interferenzversuch wegen seiner positiven Wichtigkeit sowohl als wegen seines difficilen Charakters von Andern und mit anderen Flüssigkeiten als Wasser wiederholt würde, indess scheint seine Beweiskraft doch nirgends schriftlich angefochten worden zu sein.

Der Erste, der sich offen zu Gunsten der Fresnel'schen Theorie aussprach, war wohl Sellmeier. Dessen Vorschlag gelangte durch die Vermittelung Humboldt's an Moigno,

der das Schreiben (1852) in den ersten Band seines Cosmos aufnahm. Sellmeier meinte, dass das Misslingen des von ihm proponirten Versuches die schwersten Einwürfe gegen die Theorie Fresnel's involvire. Nichtsdestoweniger blieb derselbe meines Wissens ohne Ausführung. Der Sellmeier'sche Vorschlag hatte aber einen anderen zur Folge, den nämlich, den Fizeau[1]) machte, um mittelst der durch die Bewegung der Erde bewirkten Intensitätsänderung des terrestrischen Lichtes deren Umlauf darzuthun. Indess auch diese Idee scheint niemals realisirt zu sein.

Im Jahre 1854 beschäftigte sich Beer[2]) mit Fresnel's Aberrationslehre. Derselbe behandelt die Fresnel'sche Deutung des Arago'schen Experimentes in doppelter Weise. Einmal schlägt er ungefähr den gleichen Weg ein, den wir oben bei der Entwickelung des zweiten Specialfalles der aberrativen Lichtbrechung eingehalten haben. Sodann denkt er sich eine aus brechender Fläche und einem mit dem brechenden Mittel erfüllten Astrolabium bestehende Combination, die im Princip völlig mit der Boscovich'schen übereinstimmt. Beer gab dem Coefficienten der Entrainirung den Namen „Correptionscoefficient“ und gerieth dadurch in eine Auseinandersetzung mit Babinet und Moigno[3]), die diese Bezeichnung missverständlich aufnahmen.

Statt der analytischen Behandlungsweise Beer's gab 1858 Fr. Eisenlohr[4]) dem Fresnel'schen Specialfall eine mehr geometrische Ableitung, ohne sonst Neues zuzufügen.

Wiederum war es Fizeau, der im Jahre 1859 der Theorie eine weitere experimentelle Stütze schaffte und durch seine Versuche über die Drehung der Polarisationsebene das oben erlangte positive Resultat bestätigte. Zwar blieb die strengere Begründung des Einflusses der Erdbewegung auf Intensität und Polarisationsebene der Zukunft vorbehalten, aber an dem

1) In einem Briefe an Moigno, Cosmos T. I, p. 690.
2) Pogg. Ann. Bd. 93, S. 213.
3) Ebendaselbst Bd. 94, S. 428.
4) Ebendaselbst Bd. 104, S. 343.

Ergebniss der Versuche selbst wurde so wenig gezweifelt, dass der Astronom Faye[1]) es unternahm, auf Grund derselben die bisherige Ansicht von der Translation des Sonnensystems zu prüfen. Die dieserhalb durchgeführten Rechnungen ergaben, dass, wenn Fizeau's Zahlen wirklich die Genauigkeit haben, die sie beanspruchen, die von den Astronomen dem Sonnensystem zugeschriebene Bewegung gegen das Sternbild des Herkules nicht existire. Wenn Herr Faye in diese Berechnung der Fizeau'schen Messungen die absolute Translationsgeschwindigkeit der Erde und nicht ihre relative Geschwindigkeit in Beziehung auf die Sonne einführt, so ist das, wie wir gesehen, einzig correct. Faye verwickelte das freilich in einen Streit mit de Tessan[2]), der die Berechtigung dieses Verfahrens bestritt, er fand aber einen Bundesgenossen in Moigno[3]).

Haben nun die Arbeiten Fizeau's der Theorie Fresnel's, wie es scheint, den definitiven Sieg errungen, so nehmen begreiflicher Weise alle folgenden Untersuchungen dieselbe zu ihrer Grundlage.

Besonders interessant ist ein Schreiben von Hoek in Utrecht an Prof. Peters[4]). Der Verfasser theilt in demselben (1861) eine Reihe von wichtigen Resultaten mit, die er in der Aberrationslehre gewonnen und demnächst in den Rech. astron. d. l'obs. d'Utrecht veröffentlichen werde. Es wird z. B. ein Ausdruck aufgestellt für den Drehungswinkel eines im Vacuum gespiegelten Strahles, sowie für den Brechungswinkel im Falle zweier sich mit den Geschwindigkeiten g und G nach den Richtungen φ und Φ bewegender Mittel, deren absolute Brechungsindices n und N bekannt sind.

Babinet[5]) studirt (1863) die Modification der Gittererscheinungen und stellt die eigenthümliche Behauptung auf, dass es nicht passend sei, die Gittererscheinungen mit den

1) Compt. rend. T. 49, p. 870. — Pogg. Ann. Bd. 109, S. 170.
2) Compt. rend. T. 49, p. 980.
3) Cosmos T. 16, p. 43, 73.
4) Astron. Nachr. Bd. 54, S. 145.
5) Compt. rend. T. 56, S. 411.

gewöhnlichen Beugungserscheinungen zu vermengen, sondern dass man lieber fünf Arten der Lichtfortpflanzung unterscheiden solle, nämlich in gerader Linie, durch Reflexion, Refraction, Diffraction und durch das Gitter. Es wird nämlich als wichtigste Eigenschaft der durch das Gitter abgelenkten Wellen ihre Abhängigkeit von der Bewegung desselben bezeichnet, während bei der Fortpflanzung in gerader Linie, durch Reflexion und Refraction sich eine Compensation einstelle. Babinet's Vorschlag, die Gittererscheinungen zur Untersuchung der Bewegung des Sonnensystems zu benutzen, wurde 1860 von Ångström [1]) versuchsweise ausgeführt.

Bezüglich der Arbeiten von Klinkerfues (1865—1870) genüge hier die Bemerkung, dass derselbe rücksichtlich der Formulirung des modificirten Spiegelungs- und Brechungsgesetzes auf die Bedeutung der relativen Geschwindigkeiten als solcher aufmerksam machte. Ebenso hat derselbe die schon S. 82 gerügte Verwechselung Fresnel's zwischen modificirter und unmodificirter Wellenlänge in ihrer principiellen Bedeutung gewürdigt. Was übrigens die von Klinkerfues vorgeschlagene Bezeichnung der „physiologischen" Aberration betrifft, so muss dieselbe als eine unpassende zurückgewiesen werden. Denn Nichts hindert, bei Aberrationsversuchen den physiologischen Apparat des Auges etwa durch einen photographischen zu ersetzen.

Die Sätze Klinkerfues's erfuhren schon 1866 eine Bekämpfung seitens van der Willigen [2]). Derselbe hat dann selbständig der Behandlung des zweiten Specialfalles der Brechung von Fresnel und des analogen der Beugung von Babinet die Entwickelung des ersten hinzugefügt.

Von einem Versuche, den Maxwell [3]) 1864 anstellte und 1867 veröffentlichte, und bei dem die Strahlen einer irdischen Lichtquelle ein passend umgeändertes Spectroskop nach einander in genau entgegengesetzter (scheinbarer) Richtung durch-

---

1) Pogg. Ann. Bd. 123, S. 500.
2) Archives du Musée Teyler, V. I, p. 6, 364. Extrait des Arch. p. 80.
3) Phil. Transact. 1868. part. II, p. 529.

laufen, darf ich wohl absehen, denn derselbe beweist meines Erachtens doch gar zu wenig.

Dahingegen machte die Fresnel'sche Auffassung im Jahre 1868 insofern einen gewichtigen Fortschritt, als nämlich Boussinesq*), den bisherigen Boden der dioptrischen Theorien verlassend, die Erscheinungen der Fortpflanzung des Lichtes im Innern der durchsichtigen Mittel geradezu aus einem Mitschwingen der ponderablen Theilchen derselben zu erklären suchte.

Heisst nämlich für eine Wellennormale längs der Richtung r der Schwingungsausschlag der Aethertheilchen ϱ, der der Körpertheilchen ϱ_1, und nennt man die in einer unendlich dünnen Schicht des Mittels enthaltene Aether-, resp. Körpermasse m und M, so stellt Boussinesq unter der Annahme einer gleichen Elasticität (e) und Dichtigkeit des äusseren und des inneren Aethers für die Beschleunigung im Innern des Aggregates den Ausdruck auf:

$$e\frac{d^2\varrho}{dr^2} = m\frac{d^2\varrho}{dt^2} + M\frac{d^2\varrho_1}{dt^2} = -m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\varrho - M\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\varrho_1.$$

Verbindet man hiermit die weitere Annahme, dass ϱ_1 und ϱ einander proportional, etwa $\varrho_1 = a\varrho$ sei, so geht die vorstehende Gleichung für den Zustand der Ruhe ($T_1 = T$) über in:

$$e\frac{d^2\varrho}{dr^2} = (m + aM)\frac{d^2\varrho}{dt^2},$$

und ihr entspricht als Integralgleichung:

$$\omega^2 = \frac{e}{m + aM}.$$

Man bemerkt, dass letztere sich nur dadurch von der in Abh. VIII entwickelten analogen Gleichung unterscheidet, dass hier aM an die Stelle des dortigen a^2M getreten ist. Im Uebrigen gelten die dort gezogenen Consequenzen für die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Mitteln auch hier, und es war gerade Boussinesq, dem man die erste rationelle Begründung des Fresnel'schen Coefficienten k verdankt.

---

*) Journ. de Liouville t. XIII, p. 318.

Nichtsdestoweniger scheint mir die Herleitung der obigen Differentialgleichung eine keineswegs gelungene, und Boussinesq selbst hält auch an den Longitudinalschwingungen Lamé's durchweg fest. Wenn er indess meint, dass bezüglich der Intensitätsformeln der Spiegelung und Brechung einfach auf das Cauchy'sche Verfahren zu verweisen sei, so hat zuerst Sellmeier in seinen 1872 begonnenen Aufsätzen in Poggendorff's Annalen [1]) nachgewiesen, dass jene Formeln im Gegentheil gerade die Vertauschung des Amplitüdenverhältnisses a gegen das Quadrat desselben, also die Einführung eines Verhältnisses der lebendigen Kräfte verlangen.

Eine dritte, von den beiden vorigen zwar verschiedene, aber auf ähnlicher Voraussetzung beruhende Theorie der durchsichtigen Mittel gab 1869 Puschl [2]). Ihm zufolge rührt die Verzögerung (folglich auch Brechung) eines Lichtstrahles daher, dass derselbe nicht durch den Aether allein, sondern auch durch die Substanz der auf seinem Wege getroffenen Atome hindurch fortgepflanzt werde, und so erscheint die Lichtgeschwindigkeit als die mittlere Geschwindigkeit auf dem abwechselnd durch Aether und Atomsubstanz führenden Wege. Als Werth des Coefficienten k gibt Puschl den Ausdruck:

$$\frac{n^2 - 1 + \frac{d}{\delta}}{n^2},$$

in dem der Bruch $\frac{d}{\delta}$ als das Verhältniss der Körperdichte zur Dichte der Atome für gewöhnlich vernachlässigt werden dürfe.

So ist denn auf der neu gewonnenen Grundlage eines Mitschwingens der ponderablen Moleküle zwar der Fresnel'sche Begriff der Entrainirung als eines Fortführens des Schwerpunktes des Aethers gefallen, aber der eigentliche Kern seiner Theorie nur um so fester begründet.

Endlich hat sich nach der experimentellen Seite hin noch

1) Pogg. Ann. Bd. 145, S. 399 und Bd. 147, S. 386.

2) Wien. Ber. Jän.-Heft. Jahrg. 1873 — C. Puschl; das Strahlungsvermögen der Atome. Wien 1869.

Mascart*) um die Aberrationslehre manches Verdienst erworben. Sieht man ab von seiner eng eingegränzten Entwickelung bezüglich der Modification der Spiegelung und Beugung, so hat derselbe seine Versuche über Diffraction bewegter Gitter sowie über Circnlarpolarisation und Interferenz bewegter doppeltbrechender Mittel mit anerkennenswerther Schärfe dnrchgeführt. Und wenn der „erste" bis jetzt veröffentlichte Theil seiner Arbeit nur negative Resultate aufweist, so scheint man sich vom zweiten, der wohl die Modification der Dispersion umfassen wird, bestimmte positive Werthbestimmungen versprechen zn dürfen.

Gegenwärtig, meine ich, hat die Astronomische Undulationstheorie sowohl praktisch wie theoretisch einen gewissen Abschlnss gefunden. Man ist im Stande, die vorkommenden zum Theil verwickelten Erscheinnngen auf dem Wege der Rechnnng zu verfolgen, aber nm so ernster tritt das angenommene Grundprincip, die absolute Durchdringlichkeit des Aethers seitens bewegter Weltkörper, in seiner ganzen Starrheit uns entgegen.

*) Ann. de l'École Normale, Nr. 3 et 4, 1872.

ANHANG I.

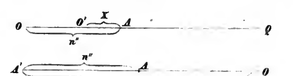
Das Doppler'sche Princip.

Chr. Doppler hat das nach ihm benannte Princip zuerst im Jahre 1842 in seiner in Prag erschienenen Schrift: „Ueber das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels“ formulirt. Da mir dieselbe nicht zugänglich ist, so gebe ich diejenige Entwickelung, welche Mach (in Prag) in Pogg. Ann. Band 112, Seite 59 ausdrücklich als die Doppler'sche bezeichnet, nachstehend wörtlich wieder und lasse dann die von Mach vorgenommene Abänderung sich anschliessen. Es heisst dort:

„Doppler untersucht die beiden Fälle, wenn der Beobachter in Bewegung und die Tonquelle in Ruhe ist, so wie den entgegengesetzten, gesondert.

„Erster Fall. Es heisse die Geschwindigkeit, mit welcher die Wellen fortgepflanzt werden, a, und O und A (Fig. 42_a)

Fig. 42.



bedeute Anfang und Ende einer Welle, Q dagegen die entfernte Quelle derselben; ferner n'' die Anzahl der Secunden, welche eine Welle nöthig hat, um von A nach O zu kommen, d. h. um eine Wellenlänge zu durchlaufen, und x die Zeit, die sie braucht, um den gegen oder von A sich bewegenden Beobachter zu erreichen. Man hat daher für den Fall der

Annähernng sowohl wie der Entfernung des Beobachters (mit der Geschwindigkeit α) von oder an die Tonquelle, wegen:

$$a x \pm \alpha x = a n''; \quad x = \frac{a n''}{a \pm \alpha}.$$

„Zweiter Fall. Für diesen (Fig. 42_b) findet man auf ganz ähnliche Weise:

$$x = \left(\frac{a \mp \alpha}{a}\right) n''.$$

„Wir bedienen uns statt der Doppler'schen Formeln' lieber der folgenden. Bedeute γ die Geschwindigkeit der Welle, $\varkappa$ die der Wellenquelle, c die des Beobachters, τ die Schwingungsdauer der Quelle und τ' die scheinbare Schwingungsdauer; so hat man:

1) bei Bewegung der Quelle allein:

$$\tau' = \tau \frac{\gamma - \varkappa}{\gamma};$$

2) bei Bewegnng des Beobachters allein:

$$\tau' = \tau \frac{\gamma}{\gamma - c};$$

3) wenn Quelle nnd Beobachter zngleich sich bewegen:

$$\tau' = \tau \frac{\gamma - \varkappa}{\gamma - c};$$

wobei $\varkappa$ und c positiv zu nehmen sind in der Richtung von der Quelle gegen den Beobachter, negativ in der entgegengesetzten. Statt der Schwingungsdaner könnte man auch ohne Veränderung der Formeln die entsprechende Wellenlänge einführen."

Und ferner Seite 61:

„Die von Doppler gewonnenen Formeln sind nach der Voranssetzung abgeleitet, dass der Ton aus einer Reihe von Explosionen bestehe, denn es wird hier von der Welle als von einem Individnnm gesprochen."

Eine ganz ähnliche Ableitnng von Maxwell hat Huggins in seine bekannte Abhandlnng über die „Spectra of some of the Stars and Nebnlae" (Phil. Transact. 1868, part. II, p. 529) aufgenommen. Dieselbe lautet wie folgt:

„Let a source of light be snch that it produces n distnrbances or vibrations per second, and let it be at such a

distance from the earth that the light reqnires a time T to reach the earth. Let the distance of the source of light from the earth be altered, either by the motion of the source of light, or by that of the earth, so that the light which emanates from the sourcc t seconds afterwards reaches the earth in a time T'.

During the t seconds nt vibrations of the source of light took place, and these reached the earth between the time T and the time $t + T'$, that is, during $t + T' - T$ seconds. The nnmber of vibrations which reached the earth per second was therefore no longer n, but $n \frac{t}{t + T' - T}$.

„If v is the velocity of separation of the source of light from the earth, and V the velocity of light between the bodies relative to the earth, then $vt = V(T' - T)$, and the number of vibrations per second at the earth will be $n \frac{V}{V + v}$" etc.

ANHANG II.

Lettre de M. Fresnel à M. Arago, sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique.

(Ann. de chim. et de phys. t. IX, p. 57.)

„Mon cher ami,

„Par vos belles expériences sur la lumière des étoiles, vous avez démontré que le mouvement du globe terrestre n'a aucune influence sensible sur la réfraction des rayons qui émanent de ces astres. On ne peut expliquer ce résultat remarquable, dans le système de l'émission, comme vous l'avez fait observer, qu'en supposant que les corps lumineux impriment aux molécules de lumière une infinité de vitesses différentes, et que ces molécules n'affectent l'organe de la vue qu'avec une seule de ces vitesses, ou du moins entre des limites très-rapprochées, et telles qu'un dix-millième en plus ou en moins est plus que suffisant pour empêcher la sensation. La nécessité de cette hypothèse n'est pas une des moindres difficultés du système de l'émission; car à quoi tient la vision? Au choc des molécules lumineuses contre le nerf optique? Mais ce choc ne deviendrait pas insensible par une augmentation de vitesse. A la manière dont elles se réfractent dans la prunelle? Mais des molécules rouges, par exemple, dont la vitesse aurait été diminuée même d'un cinquantième, se réfracteraient encore moins que les rayons violets et ne sortiraient pas du spectre, qui présente les limites de la vision.

„Vous m'avez engagé à examiner si le résnltat de ces observations pourrait se concilier plus aisément avec le système qui fait consister la lumière dans les vibrations d'un fluide universel. Il est d'autant plus nécessaire d'en donner l'explication dans cette théorie, qu'elle doit s'appliquer également aux objets terrestres; car la vitesse avec laquelle se propagent les ondes est indépendante dn mouvement du corps dont elles émanent.

„Si l'on admettait que notre globe imprime son mouvement à l'éther dont il est enveloppé, on concevrait aisément pourquoi le même prisme réfracte tonjours la lumière de la même manière, quelle que soit le côté d'où elle arrive. Mais il paraît impossible d'expliquer l'aberration des étoiles dans cette hypothèse: je n'ai pu jusqu'à présent dn moins concevoir nettement ce phénomène qu'en supposant que l'éther passe librement au travers du globe, et que la vitesse communiquée à ce fluide subtil n'est qn'nne petite partie de celle de la terre; n'en excède pas le centième, par exemple.

„Quelqne extraordinaire qne paraisse cette hypothèse au premier abord, elle n'est point en contradiction, ce me semble, avec l'idée qne les plus grands physiciens se sont faite de l'extrême porosité des corps. On peut demander, à la vérité, comment un corps opaque très-mince interceptant la lumière, il arrive qu'il s'établisse un courant d'éther au travers de notre globe. Sans prétendre répondre complètement à l'objection, je ferai remarquer cependant que ces deux sortes de monvemens sont d'nne natnre trop différente pour qu'on puisse appliquer à l'un ce qn'on observe relativement à l'autre. Le mouvement lumineux n'est point un courant, mais une vibration de l'éther. L'on conçoit que les petites ondes élémentaires dans lesquelles la lumière se divise en traversant les corps penvent, dans certains cas, se trouver en discordance lorsqu'elles se réunissent, en raison de la différence des chemins parcourus on des retards inégaux qu'elles ont éprouvés dans leur marche; ce qui empêche la propagation des vibrations, on les dénature de façon à lenr ôter la propriété d'éclairer, ainsi qne cela a lieu d'une manière bien frappante

dans les corps noirs; tandis que les mêmes circonstances n'empêcheraient pas l'établissement d'un courant d'éther. L'on augmente la transparence de l'hydrophane en la mouillant, et il est évident que l'interposition de l'eau entre les particules, qui favorise la propagation des vibrations lumineuses, doit au contraire être un petit obstacle de plus à l'établissement d'un courant d'éther; ce qui démontre bien la grande différence qui existe entre ces deux espèces de mouvemens.

L'opacité de la terre n'est donc pas une raison suffisante pour nier l'existence d'un courant d'éther entre ses molécules, et l'on peut la supposer assez poreuse pour qu'elle ne communique à ce fluide qu'une très-petite partie de son mouvement.

„A l'aide de cette hypothèse, le phénomène de l'aberration est aussi facile à concevoir dans la théorie des ondulations que dans celle de l'émission; car il résulte du déplacement de la lunette pendant que la lumière la parcourt: or, d'après cette hypothèse, les ondes lumineuses ne participant point sensiblement au mouvement de la lunette, que je suppose dirigée sur le lieu vrai de l'étoile, l'image de cette astre se trouve en arrière du fil placé au foyer de l'oculaire d'une quantité égale à celle que parcourt la terre pendant que la lumière parcourt la lunette.

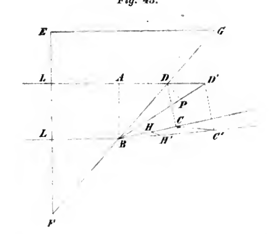
„Il s'agit d'expliquer maintenant, dans la même hypothèse, comment la réfraction apparente ne varie pas avec la direction des rayons lumineux par rapport au mouvement terrestre.

„Soit EFG (Fig. 43) un prisme dont le côté EF est supposé perpendiculaire à-la-fois à l'écliptique et aux rayons incidens, qui se trouvent ainsi dans la direction du mouvement terrestre: s'il peut influer sur leur réfraction, c'est le cas où cette influence doit être le plus sensible. Je suppose qu'ils se meuvent dans le même sens que le prisme.

„Les rayons, étant perpendiculaires à la surface d'entrée, n'éprouvent aucune réfraction de ce côté du prisme, et l'on n'a à considérer que l'effet produit par la seconde surface. Soient LD et LB deux de ces rayons qui rencontrent la surface de sortie aux points D et B. Soit BC la direction que prend le rayon LB en sortant du prisme, dans le cas où ce



Fig. 43.



prisme est immobile. Si du point D on abaisse une perpendiculaire sur le rayon émergent, et que par le point B, on mène BA perpendiculairement aux rayons incidens; la lumière doit parcourir AD dans le même instant que BC: telle est la loi qui détermine la direction de l'onde réfractée DC. Mais le prisme étant entraîné par le mouvement terrestre, pendant que la lumière parcourt l'intervalle AD, le point D se déplace; ce qui, augmentant la différence des chemins parcourus dans le verre par les deux rayons LD et LB, doit changer l'angle de réfraction. FG représentant la position de la surface d'émergence, lorsque l'onde incidente est arrivée en AB, soit D' le point où le rayon AD atteint cette surface et sort du prisme. Soit BC' la nouvelle direction des rayons réfractés. La perpendiculaire $D'C'$ sera celle de l'onde émergente qui devra satisfaire à la condition générale que AD' soit parcouru par la lumière dans le même temps que BC'. Mais pour déterminer les rapports de longueur de ces deux intervalles, il faut calculer la variation que le mouvement du prisme apporte dans la vitesse des ondes lumineuses qui le parcourent.

„Si ce prisme entraînait avec lui tout l'éther qu'il contient, la totalité du milieu qui sert de véhicule aux ondes partageant ainsi le mouvement terrestre, la vitesse des ondes

lumineuses serait celle qu'elles devraient avoir dans le milien supposé immobile, angmentée de la vitesse de la terre. Mais le cas dont il s'agit est plns compliqué; ce n'est qu'une partie de ce milien qni est entraînée par notre globe, celle qui constitue l'excès de sa densité sur l'éther cnvironnant. L'analogie indique que lorsqu'une partie seulement du milieu se déplace, la vitesse de propagation des ondes ne doit être augmentée que de la vitesse du centre de gravité du système.

„Ce principe est évident pour le cas où la partie en mouvement est la moitié du milieu; car en rapportant le mouvement du système à son centre de gravité, considéré un instant comme fixe, ses deux moitiés s'en éloignent l'une et l'autre avec une égale vitesse et dans des sens opposés; il en résulte que les ondes doivent être autant rétardées dans un sens qu'accélérées dans l'autre, et qu'elles n'ont que la vitesse ordinaire de propagation par rapport au centre de gravité, ou, ce qui revient au même, qu'elles partagent son mouvement. Si la partie mobile était le quart, le huitième, le seizième, etc. du milieu, on démontrerait aussi facilement que la vitesse à ajouter à celle de propagation des ondes est le quart, le huitième, le seizième, etc. de celle de la partie mobile, ou la vitesse même du centre de gravité, et il est clair que le théorême étant vrai pour tous ces cas particuliers, doit l'être en général.

„Cela posé, le milieu prismatique étant en équilibre de tension avec l'éther environnant (je suppose, pour plus de simplicité, que l'expérience est faite dans le vide), on peut considérer le retard de la lumière dans le prisme lorsqu'il est immobile, comme résultant uniquement d'une plus grande densité; ce qui donne le moyen de déterminer le rapport de densité des deux milieux; car on sait qu'il doit être inverse de celui des carrés des vitesses de propagation des ondes. Soit d et d' les longueurs d'ondulation de la lumière dans l'éther environnant et dans le prisme, Δ et Δ' les densités de ces deux milieux; on a donc la proportion: $d^2 : d'^2 = \Delta' : \Delta$; d'où $\Delta' = \Delta \frac{d^2}{d'^2}$, et par conséquent $\Delta' - \Delta = \Delta\left(\frac{d^2 - d'^2}{d'^2}\right)$. Telle est

la densité de la partie mobile du milieu prismatique. Si l'on représente par t l'espace que parcourt la terre pendant la durée d'une oscillation lumineuse, le déplacement du centre de gravité de ce milieu pendant le même intervalle de temps, que je prends pour unité, ou la vitesse de ce centre de gravité sera: $t.\left(\frac{d^2-d'^2}{d'^2}\right)$. Par conséquent, la longueur d'ondulation d'' dans le prisme emporté par la terre sera égale à $d'+t\left(\frac{d^2-d'^2}{d'^2}\right)$.

„En calculant, à l'aide de cette expression, l'espace AD' parcouru par le rayon AD avant sa sortie du prisme, on peut aisément déterminer la direction du rayon réfracté BC'. Si on la compare à celle du même rayon BC, dans le cas où le prisme est immobile, on trouve pour le sinus de l'angle CBC', en négligeant, à cause de la petitesse de t, tous les termes multipliés par son carré et les puissances supérieures, l'expression:

$$\frac{t}{d'}\sin i\cos i-\frac{t}{dd'}\sin i\sqrt{d'^2-d^2\sin^2 i},$$

dans laquelle i représente l'angle d'incidence ABD.

„Je suppose que, par un point H quelconque du rayon BC, on mène une ligne HH' parallèle à l'écliptique, et égale à l'espace parcouru par la terre pendant le temps employé par la lumière pour aller de B en H'; l'axe optique de la lunette avec laquelle on observe le point de mire étant dirigé suivant BH, la lumière doit suivre la direction BH' pour arriver en H' en même temps que le fil de la lunette entraînée dans le mouvement terrestre: or, la ligne BH' coïncide précisément avec la direction BC' du rayon réfracté par le prisme emporté dans le même mouvement; car on trouve aussi, pour la valeur de $\sin HBH'$, l'expression:

$$\frac{t}{d'}\sin i\cos i-\frac{t}{dd'}\sin i\sqrt{d'^2-d^2\sin^2 i}.$$

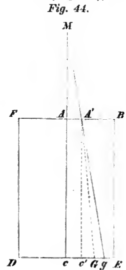
„Ainsi, l'on doit placer la lunette dans la même direction que si le prisme était immobile; d'où il résulte que le mouvement de notre globe ne doit avoir aucune influence sen-

sible sur la réfraction apparente, lors même qu'on suppose qu'il ne communique à l'éther qu'une très-petite partie de sa vitesse. On peut s'assurer, par un calcul très-simple, qu'il doit en être de même de la réflexion. Ainsi, cette hypothèse qui donne une explication satisfaisante de l'aberration, ne conduit à aucune conséquence contraire aux faits observés.

„Je terminerai cette lettre par une application de la même théorie à l'expérience proposée par Boscovich, consistant à observer le phénomène de l'aberration avec des lunettes remplies d'eau, ou d'un autre fluide beaucoup plus réfringent que l'air, pour s'assurer si la direction dans laquelle on aperçoit une étoile peut varier en raison du changement que le liquide apporte dans la marche de la lumière. Je remarquerai d'abord qu'il est inutile de compliquer de l'aberration le résultat que l'on cherche, et qu'on peut aussi bien le déterminer en visant un objet terrestre qu'une étoile. Voici, ce me semble, la manière la plus simple et la plus commode de faire l'expérience.

„Ayant fixé à la lunette même, ou plutôt au microscope $FBDE$ (Fig. 44), le point de mire M, situé dans le prolongement de son axe optique CA, on dirigerait ce système perpendiculairement à l'écliptique, et, après avoir fait l'observation dans un sens, on le retournerait bout pour bout, et l'on ferait l'observation en sens contraire. Si le mouvement terrestre déplaçait l'image du point M par rapport au fil de l'oculaire, on la verrait, de cette manière, tantôt à droite et tantôt à gauche du fil.

Fig. 44.



„Dans le système de l'émission, il est clair, comme Wilson l'a déjà remarqué, que le mouvement terrestre ne doit rien changer aux apparences du phénomène. En effet, il résulte de ce mouvement que le rayon par-

tant de M doit prendre pour passer par le centre de l'objectif, une direction MA' telle que l'espace AA' soit parcouru par le globe dans le même intervalle de temps que la lumière emploie à parcourir MA', ou MA (à cause de la petitesse de la vitesse de la terre relativement à celle de la lumière). Représentant par v la vitesse de la lumière dans l'air, et par t celle de la terre, on a donc $MA : AA' :: v : t$, ou $\frac{AA'}{AM} = \frac{t}{v}$; c'est le sinus de l'incidence. v' étant la vitesse de la lumière dans le milieu plus dense que contient la lunette, le sinus de l'angle de réfraction $C'A'G$ sera égal à $\frac{t}{v'}$; on aura donc $C'G = A'C' \frac{t}{v'}$; d'où l'on tire la proportion $C'G : A'C' :: t : v'$. Par conséquent, le fil C' de l'oculaire placé dans l'axe optique de la lunette arrivera en G en même temps que le rayon lumineux qui a passé par le centre de l'objectif.

„La théorie des ondulations conduit au même résultat. Je suppose, pour plus de simplicité, que le microscope est dans le vide. d et d' étant les vitesses de la lumière dans le vide et dans le milieu que contient la lunette, on trouve, pour le sinus de l'angle d'incidence AMA', $\frac{t}{d}$, et pour celui de l'angle de réfraction $C'A'G$, $\frac{td'}{d^2}$. Ainsi, indépendamment du déplacement des ondes dans le sens du mouvement terrestre, $C'G = A'C' . \frac{td'}{d^2}$. Mais la vitesse avec laquelle ces ondes sont entraînées par la partie mobile du milieu dans lequel elles se propagent est égale à $t\left(\frac{d^2 - d'^2}{d^2}\right)$; donc leur déplacement total Gg, pendant le temps qu'elles emploient à traverser la lunette, est égale à:

$$\frac{A'C'}{d'}\, t\left(\frac{d^2 - d'^2}{d^2}\right);$$

ainsi:

$$C'g = A'C' . t\left(\frac{d'}{d^2} + \frac{d^2 - d'^2}{d'd^2}\right) = A'C' . t\left(\frac{d^2}{d'd^2}\right) = A'C' \frac{t}{d'}.$$

On a donc la proportion: $C'g : A'C' :: t : d'$; par conséquent l'image du point M arrivera en g, en même temps que le fil

du micromètre. Ainsi, les apparences du phénomène doivent toujours rester les mêmes, quel que soit le sens dans lequel on tourne cet instrument. Quoique cette expérience n'ait point encore été faite, je ne doute pas qu'elle ne confirmât cette conséquence, que l'on déduit également du système de l'émission et de celui des ondulations."

